

Восточно-Казахстанский Технический Университет им. Д. Серикбаева

УДК 519.642.3

На правах рукописи

НУРМАНГАЛИЕВА МАЯ БОЛАТОВНА

Эффективные численные методы решения обратной задачи математической геофизики о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философских наук (PhD)

Отечественный научный консультант
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент НАН РК,
профессор Н.М. Темирбеков

Зарубежный научный консультант
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор С.И. Кабанихин

Республика Казахстан
Алматы, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ.....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ О ПРОДОЛЖЕНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В СТОРОНУ ВОЗМУЩАЮЩИХ МАСС	
1.1 Гравитационное поле и методы гравиразведки.....	13
1.2 Постановка обратной задачи геофизики о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс.....	15
1.3 Приведение задачи продолжения гравитационного потенциала от возмущающих масс к интегральному уравнению Фредгольма первого рода.....	16
2 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА	
2.1 Метод приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с несимметричным ядром с использованием регуляризации А.Н.Тихонова.....	19
2.2 Применение метода Г.Н. Положего для численного решения уравнения Фредгольма первого рода.....	30
2.3 Конструктивный подход с «сопровождением» и решение интегральных уравнений Фредгольма первого рода.....	35
2.4 Алгоритм метода сопряженных уравнений для обработки большого количества данных при выявлении аномалий распределения химических элементов.....	38
2.5 Двумерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода...	44
2.6 Численный анализ.....	47
3 ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА С БАЗИСАМИ В ВИДЕ ВЕЙВЛЕТОВ ЛЕЖАНДРА	
3.1 О вейвлетах Лежандра.....	52
3.2 Применение вейвлетов Лежандра в качестве базисных функций в проекционном методе Галеркина и его модификациях.....	56
3.3 Получение априорных оценок и изучение сходимости метода	58
3.4 Численный анализ.....	66
4 СОЗДАНИЕ МОДУЛЯ ГЕОИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОХИМИИ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИМИ АЛГОРИТМАМИ	
4.1 Описание программного модуля.....	70
4.2 Апробация разработанного программного модуля для определения аномалий золота на глубине.....	75
4.3 Применение алгоритма для определения распределения аномалий лития на глубине.....	77
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	80

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	81
ПРИЛОЖЕНИЕ А –Программный код реализации метода Бубнова Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра.....	86

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ 7.1-84. Система стандартов по информации, библиотечному ииздательскому делу. Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.9-95 (ИСО 214-76). Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Реферат и аннотация. Общие требования.

ГОСТ 7.12-93. Система стандартов по информации, библиотечному ииздательскому делу. Библиографическая запись. Сокращение слов на русском языке. Общие требования и правила.

ГОСТ 7.32-2001. Межгосударственный стандарт. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 8.417-81. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических величин.

ВВЕДЕНИЕ

Общее описание работы. Настоящая диссертационная работа посвящена разработке и анализу эффективных численных методов для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, к которым сводится большой класс обратных задач геофизики.

В данной работе обратная задача о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс была исследована с помощью аппарата интегральных уравнений. Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода связано с задачей выявления аномалий при исследовании пространственного распределения химических элементов на редкометальных месторождениях.

Известны различные приближенные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которые условно можно разделить на три класса: регуляризирующие, итерационные и проекционные методы. В работе к поставленной задаче применены, классические методы регуляризации А.Н.Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2] и современные приближенные методы, демонстрирующие удобство применения и хорошую сходимость.

В диссертационной работе рассмотрен один из эффективных итерационных методов решения интегральных уравнений Фредгольма, метод Г.Н.Положего [3, 4]. Этот метод равномерно сходится при любых несобственных значениях параметра λ в уравнении второго рода и является сходящимся в среднем для уравнения первого рода.

В работе [5] предложен конструктивный подход к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода основанный на трансформированный формулировке корректной задаче с ядром Пуассона. Интегральное уравнение распространяется на расширенный интервал и используется процедура сглаживания данных о решении с помощью интегрирования. В этом оригинальном подходе используется легко обратимый интегральный оператор «сопровождения» с ядром Пуассона. Разработанный алгоритм базируется на рациональном синтезе потенциала гармонического ряда с рядом Фурье. В результате преобразований задача сводится к численной реализации интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

В данной диссертационной работе рассматриваются вопросы численной реализации предложенного в [5] подхода и актуальные аспекты оптимизации алгоритма с учетом структуры свободного члена. Выбор метода численной реализации вспомогательного, интегрального уравнения является предметом дальнейших исследований.

В работах [6, 7] предлагается новый двухэтапный метод для численного решения уравнения Фредгольма первого рода, заключающийся в преобразовании постановки обратной задачи методом сопряженного оператора. Этот же подход применён в данной диссертационной работе для решения поставленной обратной задачи геофизики о продолжении потенциала в сторону возмущающих масс.

Одной из самых привлекательных разработок последних лет стало применение вейвлетов, как базисные функции в методах проекции. Техника вейвлет позволяет создавать очень эффективные алгоритмы по сравнению с известными регуляризующими алгоритмами. В работе K.Maleknejad, S.Sohrabi [8] предложен эффективный метод, основанный на выборе вейвлетов Лежандра, для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

В диссертационной работе для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода применен проекционный метод Бубнова-Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра. В методе Галеркина в качестве базисных функций использованы вейвлеты Лежандра и для определения коэффициентов разложения получена система линейных алгебраических уравнений. Эта система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов. Рассмотрены несколько конкретных примеров интегрального уравнения Фредгольма первого рода с известными решениями. Доказана сходимость метода и получены априорные оценки [9].

В диссертационной работе для проведения сравнительного анализа выполнены численные расчеты решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом регуляризации А.Н.Тихонова, методом Г.Н.Положего, конструктивным методом «сопровождения» и методом Бубнова-Галеркина с вейвлетами Лежандра [10].

Далее разработанный методтихоновской регуляризации обобщен для двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, так как для интерпретации геофизических данных большую практическую значимость имеет двумерная постановка задачи.

В настоящей работе представлено описание программного модуля геоинформационной системы, основанного на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений [11]. Функционирование программного модуля основано на применении теории обратных задач математической геофизики с использованием геологических данных на поверхности земли, геофизических измерений и геохимических анализов в качестве входных данных. Программный модуль для решения обратной задачи о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс используется для реальных данных конкретного месторождения полезных ископаемых [12].

Актуальность работы. Работа посвящена решению обратной задачи геофизики о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс, которое приводит к исследованию численных методов решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

На протяжении многих лет добыча полезных ископаемых и разведка новых месторождений является актуальной задачей, в частности и для Казахстана. Важнейшее значение для развития геологической отрасли Казахстана имеет охват геологической изученности территории по глубинному

геологическому, геолого-минерагенному картированию. Также актуальной является задача разведки новых месторождений вместо, истощающихся старых.

К настоящему времени сформировался ряд научных подходов к изучению структуры недр Земли. Среди них важное прикладное значение имеют методы математической геофизики [1]. Данный подход успешно используется для развития теории и практики геофизических исследований геологической среды. Многие задачи математической геофизики приводят к решению обратных и некорректных задач, применение которых, в основном, связано с науками о Земле: обратной задачи магнитотеллурического зондирования, каротажа, продолжения полей геохимических исследований, сейсмики, теории потенциала и других. Следует отметить, что стремительное развитие методов повышения геологической изученности невозможно без развития геоинформационных технологий и микроэлектроники. Исследования в этой области используют современные методы компьютерной обработки больших объемов данных наблюдения Земли, а также методы вычислительной математики [13]. В настоящее время практически отсутствуют препятствия со стороны систем полевых наблюдений, включающие и источники физических полей. Поэтому актуальным является развитие методов численного решения обратных задач геофизики и разработка сервисного программного обеспечения для преобразования цифровых данных в геоинформационные системы для наглядной интерпретации результатов геологических изысканий в удобном картографическом виде.

Степень геологической изученности месторождений является важнейшим информационным фундаментом для эффективного принятия управленческих решений по освоению недр. Современное состояние исследований в данной области неизбежно характеризуется фрагментарностью информации о недрах, что, в первую очередь, связано с дискретным характером ее получения. Инженерное прогнозирование на основе интерпретации таких неполных данных может приводить к стратегически неверным и экономически неэффективным решениям, к снижению эффективности геологоразведочных работ и возникновению промышленных аварийных ситуаций.

Важным классом задач гравиразведки являются задачи продолжения полей в сторону возмущающих масс. Обычно поле измеряется на поверхности Земли. Далее в этих задачах производится пересчет поля на другой уровень вплоть до аномальных масс. Данная задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для большого количества различных правых частей. Ядро интегрального уравнения остается одним и тем же. Решение такой задачи дает важные сведения об условиях залегания возмущающих масс и об аномальных телах, что расширяет возможности исследования гравитационных аномалий на практике.

Стоит отметить, что в последнее время происходит бурное развитие проекционных методов. Возрос интерес к проекционным методам решения интегральных уравнений Фредгольма с базисами в виде вейвлетов Лежандра, Хаара, Чебышева [8, 14-25].

Данные методы позволяют решать интегральные уравнения Фредгольма первого рода с достаточно хорошей точностью [8, 14-25].

Во всех вышеприведенных работах разработаны методы с базисами в виде вейвлетов, гибридных блочно-импульсных функций, но нет анализа ошибки аппроксимации невязки, оценки погрешности на полуинтервалах. При численном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода проекционными методами с базисами в виде вейвлетов используются во первых интерполирование функций и во вторых требование ортогональной проекции. Хорошо известно, что процесс кусочно-полиномиальной интерполяции является сходящимся. Поэтому в настоящей работе рассмотрены вопросы получения априорных оценок и изучение сходимости проекционных методов с базисами в виде вейвлетов на полуинтервалах. Для проведения сравнительного анализа проведены численные расчеты решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом регуляризации А.Н.Тихонова, методом основанным на теории сопряженных уравнений, методом Г.Н.Положего, конструктивным методом «сопровождения» и методом Бубнова-Галеркина с вейвлетами Лежандра.

Новый численный метод решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода предложен в работе Yanying Ma, Jin Huang и Hu Li [26]. Также разработке методов численного решения двумерного уравнения Фредгольма первого рода посвящена работа С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина [27].

В настоящее время в связи с бурным развитием компьютерной технологии в геологии интенсивно развиваются методы и подходы научной визуализации, основанные на дополнительном анализе данных. Общая концепция заключается в том, что на входе задается основное поле данных на дневной поверхности и дополнительные условия. Далее, для их анализа и обработки применяются методы математической геофизики, в результате которого получается новая информация для глубинных изысканий. Затем в информационной системе применяются средства визуализации к полученной новой информации и к основному полю данных. Таким образом, информационная система основана на синтезе методов визуального представления и методов математической геофизики, вычислительной математики из разных разделов знаний. В настоящей работе представлено описание программного модуля геоинформационной системы, основанного на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений. Функционирование программного модуля основано на применении теории обратных задач математической геофизики с использованием геологических данных на поверхности земли, геофизических измерений и геохимических анализов в качестве входных данных. Программный модуль для обратной задачи о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс используется для реальных данных конкретного месторождения полезных ископаемых.

Таким образом, с уверенностью можно считать, что тема исследования является актуальной и представляет научный и практический интерес.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является разработка эффективных численных методов решения обратной задачи выявления аномалий при исследовании пространственного распределения химических элементов на месторождениях.

Были поставлены следующие задачи исследования:

- Исследовать постановку обратной задачи математической геофизики о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс;
- Привести обратную задачу математической геофизики к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода;
- Исследовать и сравнить эффективность приближенных методов решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода;
- Исследовать вопросы сходимости и точности рассмотренных методов;
- Провести анализ полученных численных результатов и оценить точность разработанных методов численной реализации обратных задач математической геофизики и геохимии на тестовых примерах;
- Получить численное решение двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода;
- Разработать программный модуль геоинформационной системы, основанный на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений;
- Использовать разработанный модуль в виде комплекса прикладных программ для цифрового моделирования конкретного месторождения с целью выявления скрытых рудных объектов.

Методы исследования. В диссертации обратная задача о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс была исследована с помощью аппарата интегральных уравнений. Для приближенного численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода были использованы следующие методы: метод регуляризации А.Н.Тихонова, двухэтапный метод, основанный на теории сопряженных уравнений, метод Г.Н.Положего, конструктивный метод с «сопровождением», проекционный метод Бубнова–Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра. Используются метод априорных оценок для оценки невязки на полуинтервалах метода Бубнова –Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра, также получена оценка погрешности решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Научные положения, выносимые на защиту:

- Разработан алгоритм метода сопряженных уравнений для численного решения задачи обработки большого количества данных;
- Разработан проекционный метод Бубнова–Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра;

- Получена априорная оценка невязки на полуинтервалах метода Бубнова –Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра;
- Получена оценка погрешности решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода;
- Получено численное решение двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода;
- Проведен анализ полученных численных результатов;
- Разработаны методы численной реализации решения обратных задач математической геофизики и геохимии;
- Разработан программный модуль геоинформационной системы, основанный на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования конкретных месторождений.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Теоретические исследования, проводимые по теме диссертации, вносят большой вклад в развитие численного решения обратных и некорректно поставленных задач математической геофизики. Практическая значимость работы состоит в том, что численные алгоритмы решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, предложенные в данной исследовательской работе, являются основой сервисного программного обеспечения с конвертацией цифрованных данных в геоинформационную систему.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК, грант № ИРН АР08856012 «Разработка модуля геоинформационной системы, основанного на методах интеллектуального выявления аномалий, для глубинного изыскания месторождений».

Апробация работы. Основные результаты исследований были представлены на следующих конференциях:

- Numerical Functional Analysis - 2021 Conference (Стамбул, Турция, 22-24 ноября 2021);
- Modern problems of applied mathematics and information (МРАМИТ) – 2021 (Фергана, Узбекистан 15–17 ноября 2021);
- VII Всемирный Конгресс Математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023);

Также основные результаты были изложены и обсуждены на научном семинаре кафедры математики Казахского Национального университета имени аль-Фарабии на семинаре кафедры математики Международной школы инженерии Восточно-Казахстанского технического университета имени Д.Серикбаева.

Публикации.

Научные результаты опубликованы в 4 научных статьях, в том числе 1 статья из списка, рекомендованного Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 1 статья в международном рецензируемом

научном журнале, входящем в первый квартиль базы Web of Science, 1 статья в международном рецензируемом научном журнале, входящем во второй квартиль базы Scopus, 1 тезис - в сборнике материалов международных конференций, проиндексированного в базе данных Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа написана в виде рукописи на русском языке, состоит из титульного листа, содержания, нормативных ссылок, введения, четырех разделов, заключения, списка из 77 использованных источников. Общий объем диссертации составляет 89 страницы, включая 20 иллюстраций, 3 таблиц и приложения А.

Основное содержание диссертации:

Введение содержит актуальность темы исследования, цели и задачи, основные положения для защиты диссертации, методы исследования, теоретическую и практическую значимость исследования, связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами, апробация работы, публикации автора, структура, объем диссертации и основное содержание.

Раздел 1 посвящен постановке обратной задачи математической геофизики о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс. Поставленная обратная задача приведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода.

В **разделе 2** рассмотрены численные методы решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода: метод регуляризации А.Н.Тихонова, метод Г.Н.Положего, конструктивный метод с «сопровождением», двухэтапный метод, основанный на теории сопряженных уравнений. Проведен анализ численных результатов на тестовых примерах.

Раздел 3описывает ещё один численный метод, метод Бубнова-Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Изучена сходимость метода и получены априорные оценки. Проведен численный эксперимент. Использование вейвлетов для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода методом Галеркина, показало достаточно хорошую эффективность. Численные расчеты показывают использование в качестве базисных функций вейвлетов Лежандра оказывает положительный эффект для численного или аналитического вычисления интегралов в вычислительной схеме.

В **разделе 4** представлено описание программного модуля геоинформационной системы, который использует интеллектуальные методы для выявления скрытых месторождений и прогноза их глубинного расположения. Функционирование этого модуля основано на теории обратных задач математической геофизики, которая использует геологические данные, геофизические измерения и геохимические анализы в качестве входных данных. Программный модуль используется для обратной задачи продолжения потенциальных полей в сторону возмущающих масс и применяется к реальным данным конкретного месторождения полезных ископаемых.

В **заключении** представлены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

В приложении А приведен программный код на языке Fortran для реализации вычислений методом Бубнова-Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра.

1 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ О ПРОДОЛЖЕНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В СТОРОНУ ВОЗМУЩАЮЩИХ МАСС

1.1 Гравитационное поле и методы гравиразведки

При интерпретации гравитационного поля возникает задача Коши для уравнения Лапласа, она также известна, как задача продолжения(М.М. Лаврентьев, 1999). Данная задача является одной из хорошо известных некорректно поставленных задач. Это классическая проблема, которая была изучена Ж. Адамаром (1923) и признана не корректной. Исследование условной устойчивости этой задачи можно найти в работах С.Н. Маргеляна (1956), М.М.Лаврентьева и В.Г.Романова (1986). Условная устойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае была доказана Т.Карлеманом (1926). А.Н. Тихонов (1943) показал, что если решение какой–либо некорректной задачи существует и принадлежит компактному подмножеству соответствующего функционального пространства, то из единственности следует устойчивость решения.

Основным этапом разведки месторождений является бурение скважин и анализ данных бурения. Если форма аномалии приводит нас к выводу, что это единое тело, то естественным выбором будет бурение скважины в центре аномалии. Однако, если вывод будет неверным, решение о бурении в центре приведет к бурению скважин между двумя аномалиями. Особенности глубинных аномалий проявляются более четко, если потенциал продолжается вниз в сторону аномальных масс. Разделение аномалий происходит при приближении к источникам возмущений, с чем связана необходимость продолжения потенциальных полей с поверхности Земли вглубь.

При исследовании строения земных недр используется метод гравиразведки, в котором по измеренной на земной поверхности ($z=0$) вертикальной составляющей напряженности гравитационного поля $g_z(x, y)$ определяют распределение аномальной плотности среды $\mu(x, y, z)$ при $z<0$ (Рисунок 1).

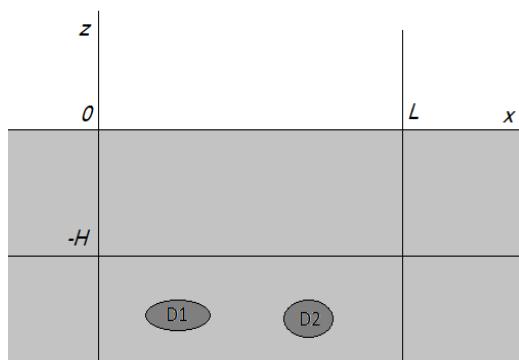


Рисунок 1. К описанию задачи продолжения

Потенциал притяжения объемных масс для всех точек пространства, расположенных вне притягивающих масс, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$. Во всех внутренних точках объема V потенциал притяжения объемных масс удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = -4\pi\mu$ [28].

Гравитационный потенциал U является решением уравнения Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi\mu, \quad (1.1.1)$$

где потенциал U – регулярен на бесконечности.

Решением (1.1.1) является ньютоновский потенциал [29]

$$U = G \int_V \frac{\mu(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \quad (1.1.2)$$

где G - универсальная гравитационная постоянная.

В гравиразведке измеряется вертикальная составляющая напряженности гравитационного поля

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z} = G \int_V \frac{\mu(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) dx_0 dy_0 dz_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}. \quad (1.1.3)$$

В двумерном случае $\frac{\partial U}{\partial y} \equiv 0$ (1.1.3) примет вид

$$g_z(x, z) = 2G \int_V \frac{\mu(x_0, z_0)(z - z_0) dx_0 dz_0}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (1.1.4)$$

Вертикальную составляющую гравитационного поля, также как и потенциал, можно пересчитывать с уровня на другой [31]. В предположении, что в слое $z \in [0, -H]$ нет источников поля, можно связать поле при $z = 0$ с полем при $z = -H$:

$$\frac{GH}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2)^{3/2}} = f(x, y), \quad (1.1.5)$$

где $f(x, y) = g_z(x, y, 0)$, $u(x, y) = g_z(x, y, -H)$.

В двумерном случае, когда поле не зависит от координаты y , выражение (1.1.5) принимает вид:

$$\frac{GH}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x_0) dx_0}{(x - x_0)^2 + H^2} = f(x). \quad (1.1.6)$$

Выражения (1.1.5) и (1.1.6) можно рассматривать, как интегральные уравнения Фредгольма первого рода для определения $u(x, y) = g_z$ на глубине $z = -H$ по измеренному полю f на земной поверхности при $z = 0$. Это классическая трансформация гравитационного поля путем пересчета поля вниз в сторону источников. Далее рассмотрим более подробную математическую постановку задачи.

1.2 Постановка обратной задачи геофизики о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс

Пусть U — гравитационный потенциал аномалии, расположенной в толще Земли; μ — плотность распределения масс, x — горизонтальная ось, а ось z направлена вертикально вверх. Расположим ось z так, чтобы на земной поверхности $z = 0$, как показано на рисунке 1. В случае двумерных аномалий, когда массы распределены с постоянной плотностью параллельно оси y (плоские поля), рассматриваемая задача определения гравитационного потенциала при $z < 0$ вплоть до аномалий, глубина залеганий которых есть H , а потенциал $U(x, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области без аномалий:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, z > -H. \quad (1.2.1)$$

Условия на земной поверхности, полученные путем измерений, имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, 0) = f(x), \quad (1.2.2)$$

Еще одно краевое условие

$$U(x, -\infty) = 0. \quad (1.2.3)$$

Ограниченностю решения обеспечивается наложением ограничений на поведение функции $f(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Задача (1.2.1) — (1.2.3) при $z > 0$ является обычной краевой задачей. Проблема продолжения решения этой корректной задачи возникает при условии $-H < z < 0$, которое обращает задачу в некорректную [1].

Задача продолжения (1.2.1) — (1.2.3) при $z < 0$ может быть переформулирована, как задача продолжения для $u = \frac{\partial U}{\partial z}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, z > -H \quad (1.2.4)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (1.2.5)$$

$$u(x, -\infty) = 0. \quad (1.2.6)$$

В данном случае мы получаем задачу продолжения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

1.3 Приведение задачи продолжения гравитационного потенциала от возмущающих масс к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

Будем искать решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в $\mathbb{U} = \mathbb{R}^n$ [31]

$$u(x) = v(r),$$

где $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ и v - радиальное решение, должно быть выбрано таким образом что $\Delta u = 0$ (если это возможно). Отметим, что при $i = 1, \dots, n$.

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} (x \neq 0) \quad (1.3.1)$$

Тогда имеем

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), i = 1, \dots, n. \quad (1.3.2)$$

Далее

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r). \quad (1.3.3)$$

Следовательно $\Delta u = 0$, тогда и только тогда, когда

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0. \quad (1.3.4)$$

Если $v'(r) \neq 0$, то получим

$$(\ln(v'))' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}, \quad (1.3.5)$$

откуда $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$, a -константа, Следовательно, если $r > 0$, то имеем

$$v(r) = \begin{cases} blnr + C & (n = 2), \\ \frac{b}{r^{n-2}} + C & (n \geq 3), \end{cases} \quad (1.3.6)$$

где b, C – постоянные.

Если вернуться к переменной x , то получим функцию являющейся фундаментальным решением уравнения Лапласа [31]

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| + C & (n = 2), \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}} + C & (n \geq 3), \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Отметим, что $\alpha(n)$ – объем единичного шара в \mathbb{R}^n .

Фундаментальным решением уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ будет [31]

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)f(y)dy, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy + C, & n \geq 3, \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Необходимость решения задач продолжения гравитационных полей в сторону возмущающих масс возникают при наличии аномалий в точках $(x^i, z^i), i = 1, 2$. Хорошо известно [31] то, что решение задачи (1.2.1)-(1.2.3) является гармонической функцией. Если сместим начало координат в точки (x^i, z^i) уравнение (1.2.1) не изменится и поэтому функция $U(x - x^i, z - z^i)$, также являются гармонической функцией вида (1.3.7)

$$U(x - x^i, z - z^i) = c_i \cdot \ln \sqrt{(x - x^i)^2 + (z - z^i)^2}$$

и являются фундаментальным решениями уравнения (1.2.1), c_i – где мощности аномалий.

Гравитационный потенциал от аномалий будем приближать потенциалом простого слоя с носителем [32], расположенным на отрезке $0 \leq x \leq L$ и глубине $z > -H$.

С точностью до множителя определим

$$U(x, z) = \int_0^L \mu(s) \ln r ds, \quad r = \sqrt{(x - s)^2 + (z + H)^2}, \quad z > -H. \quad (1.3.1)$$

Для производной по вертикальной переменной получим

$$u(x, z) = \int_0^L \frac{z + H}{(x - s)^2 + (z + H)^2} \mu(s) ds, z > -H. \quad (1.3.2)$$

Для определения неизвестной плотности $\mu(s)$, получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^L K(x, s) \mu(s) ds = f(x) \quad (1.3.3)$$

с симметричным ядром

$$K(x, s) = \frac{H}{(x - s)^2 + H^2}. \quad (1.3.4)$$

Обратная задача геофизики заключается в нахождении распределения источников геофизических полей, соответствующего измеренным на поверхности значениям. То есть в определении распределении аномальных масс по известному потенциалу U и сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода вида (1.3.3) с неизвестной функцией μ .

2 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Теория приближенного решения некорректных задач сформировалась, как самостоятельная ветвь вычислительной математики, только после того, как А.Н. Тихонов и М.М. Лаврентьев [1] сформулировали понятие регуляризующего алгоритма.

Исследованиям в области различных формулировок обратных и некорректных задач для уравнений гиперболического, параболического, эллиптического типа посвящены работы А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, В. Г. Романова, С.И. Кабанихина и его учеников. В работе С.И.Кабанихина, К.Т.Искакова [33] приводятся результаты численных расчетов по определению геоэлектрических свойств верхних слоев Земли. Разработке методов численного решения двумерного уравнения Фредгольма первого рода посвящена работа С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина [27]. Теоретическим вопросам обратных и некорректных задач посвящена монография С.И.Кабанихина, М.А.Бектемесова и А.Т.Нурсейтовой [34].

Работы П.Н. Вабищевича [35-37] посвящены численным решениям задач Коши для некоторых интегродифференциальных уравнений первого порядка и внесли большой вклад в разработку методов численного решения обратных задач математической физики.

Следует отметить, что многие ученые Казахстана проводят исследования в области обратных и некорректных задач. Например, работы С.А.Атанбаева [38], С.И.Темирбулатова [39], С.Елубаева [40], М.О.Отелбаева и Б.Рысбайулы [41, 42], Е.Ы.Бидайбекова [43], Т.Ш.Кальменова [44], Г.Б.Баканова [45], Д.Б.Нурсейтова [46], Б.Е.Кангужина [47], Б.Г.Мукановой [48, 49], А.Т.Нурсейтовой [50], Л.Н.Темирбековой [51] и другими.

Однако общих суждений о необходимости строить приближенные решения с учетом априорной информации о свойствах искомого решения и помехи явно недостаточно. Нужны конкретные конструктивные методы построения решений, причем в самых различных задачах.

2.1 Метод приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с несимметричным ядром с использованием регуляризации А.Н.Тихонова.

Для решения широкого класса некорректных задач, характеризующихся неустойчивостью решения, А.Н. Тихоновым [1] был разработан метод регуляризации, который в частных случаях линеаризованных обратных задач геофизики эквивалентен способу учета априорной информации о решении.

Идея метода заключается в том, что из-за неустойчивости задачи становится бессмысленным искать точное решение, и уже в самой постановке задачи ставится требование поиска приближенного решения, удовлетворяющего тем или иным условиям. Основное требование, предъявляемое к приближенному решению, заключается в том, что оно должно быть устойчиво по отношению к вариациям исходных данных в пределах их погрешности. При этом выгоднее допустить смещение оценок и ухудшение

разрешения, но добиться уменьшения их дисперсии. При этом предполагается, что при абсолютно точных данных решение единственno. Применим данный метод для поставленной обратной задачи (1.2.1)-(1.2.3).

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A[y] = \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), c \leq x \leq d. \quad (2.1.1)$$

Это уравнение имеет решение не для всякой функции $f(x)$. Будем предполагать единственность решения уравнения (2.1.1), то есть, предположим, что если у некоторой функции $\tilde{f}(x)$ уравнение (2.1.1) имеет решение $\tilde{y}(s)$, то только одно.

Обозначим через \mathbb{F} класс функций

$$\mathbb{F} = \{f(x) = A[y], y(s) \in C[a, b]\}. \quad (2.1.2)$$

Определим норму функций $y(s)$ в $C[a, b]$

$$\|y\| = \max_{a \leq s \leq b} |y(s)|. \quad (2.1.3)$$

Норма в \mathbb{F} определяется так

$$\|f(x)\| = \left[\int_c^d f^2(x)dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.4)$$

Если ядро $K(x, s)$ непрерывно, то отображение $C[a, b] \rightarrow \mathbb{F}$ непрерывно. Обратная задача нахождения $y(s)$ по заданной функции $f(x)$ – некорректна [1].

Построение алгоритма приближенного решения интегрального уравнения (2.1.1) базируется на принципе регуляризации А.Н. Тихонова [1].

Пусть задана функция $\tilde{f}(x)$. Рассмотрим функционал [1]

$$\Phi^\alpha[y, \tilde{f}(x)] = N[y, \tilde{f}(x)] + \alpha\Omega[y], \quad (2.1.5)$$

где функционал N представляет квадратичное отклонение $\tilde{f}(x)$ от $A[y]$

$$N[y, \tilde{f}(x)] = \int_c^d \{A[y] - \tilde{f}(x)\}^2 dx, \quad (2.1.6)$$

$$\Omega[y] = \int_a^b \left[p(s)y^2(s) + q(s) \left(\frac{dy(s)}{ds} \right)^2 \right] ds, \quad (2.1.7)$$

где $q(s) \geq 0, p(s) \geq 0$ – заданные непрерывные на $[a, b]$ функции.

В методе регуляризации А.Н. Тихонова $\Omega[y]$ называется регуляризирующий и Φ^α -сглаживающий функционалами.

Будем искать элемент y_α , на котором функционал (2.1.4) имеет минимальное значение.

Для приближенного решения интегрального уравнения (2.1.1) через минимизацию функционала, используются вариационные методы. Раскроем сущность вариационных методов. Рассмотрим простейший функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \pi(x, y, y') dx, \quad (2.1.8)$$

где $\pi(x, y, y')$ – заданная функция, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Предположим, что функция $y(x)$ непрерывна, имеет непрерывную производную $y'(x)$ на (x_0, x_1) и на концах отрезка $[x_0, x_1]$ принимает заданные значения

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1. \quad (2.1.9)$$

Необходимым условием, которым должна подчиняться функция $y(x)$ для того, чтобы она сообщала функционалу $J[y]$ экстремальное значение в окрестности является удовлетворение уравнению Эйлера

$$\pi_y - \frac{d}{dx} \pi_{y'} = 0. \quad (2.1.10)$$

Построим уравнение Эйлера для функционала $\Phi^\alpha[y, \tilde{f}(x)]$ определенный по формуле (2.1.5). Для начала рассмотрим функционал $\Omega[y]$. К подынтегральной функции применяя формулу (2.1.10) имеем

$$2p(s) \cdot y(s) - 2 \frac{d}{ds} \left(q(s) \frac{dy(s)}{ds} \right) = 0. \quad (2.1.11)$$

Аналогично формулу (2.1.10) используем для функционала

$$N[y, \tilde{f}(x)] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) y(s) ds - \tilde{f}(x) \right]^2 dx,$$

и имеем

$$2 \int_c^d \left\{ \left[\int_a^b K(x, s) y(s) ds - \tilde{f}(x) \right] \cdot \int_a^b K(\xi, s) y(s) d\xi \right\} dx = \\ = 2 \int_a^b \left(\int_c^d K(\xi, s) \cdot K(\xi, \zeta) d\xi \right) \cdot y(\zeta) d\zeta - 2 \int_a^b \int_c^d K(\xi, s) \tilde{f}(\xi) d\xi. \quad (2.1.12)$$

Обозначим

$$\tilde{K}(s, \zeta) = \int_c^d K(\xi, s) \cdot K(\xi, \zeta) d\xi, \quad (2.1.13)$$

$$\tilde{b}(s) = \int_c^d K(\xi, s) \tilde{f}(\xi) d\xi.$$

Тогда из (2.1.11), (2.1.12) и используя обозначения (2.1.13) для функционала (2.1.5) строится уравнение Эйлера для определения $y_\alpha(s)$

$$L^\alpha[y] = \alpha \left\{ \frac{d}{ds} \left[q \frac{dy}{ds} \right] - p(s)y \right\} - \left\{ \int_a^b \tilde{K}(s, \zeta) y(\zeta) d\zeta - \tilde{b}(s) \right\} = 0, \quad (2.1.14)$$

$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

Уравнение (2.1.14) рассмотрим в виде краевой задачи

$$L[y] = \frac{d}{ds} \left[q(s) \frac{dy}{ds} \right] - p(s)y(s) = f(s), y'(a) = y'(b) = 0. \quad (2.1.15)$$

Функция Грина $G(s, \xi)$ определяется следующим образом

$$G(s, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(s)y_2(\xi)}{q(s)w(\xi)}, & (s \leq \xi) \\ \frac{y_2(s)y_1(\xi)}{q(s)w(\xi)}, & (s \geq \xi) \end{cases}. \quad (2.1.16)$$

где $y_1(s), y_2(s)$ – решения уравнения (2.1.14), $w(\xi)$ – определитель Вронского

$$w(\xi) = \begin{vmatrix} -y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ -y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix} = -y_1(\xi)y_2'(\xi) + y_1'(\xi)y_2(\xi).$$

Единственное решение уравнения (2.1.15) задается формулой

$$y(s) = \int_a^b G(s, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.1.17)$$

Из этого следует существование $y_\alpha(s)$.

Рассмотрим разностный аналог сглаживающего функционала (2.1.5).

Для этого вводим равномерную сетку на отрезке $[a, b]$ с шагом $h_s = (b - a)/n$ и узлами $s_j = (j - 1) \cdot h_s, j = 1, 2, \dots, n$.

Аналогично введем сетку на отрезке $[c, d]$ с шагом $h_x = (d - c)/m$ и узлами $x_i = (i - 1) \cdot h_x, i = 1, 2, \dots, m$.

Сеточную функцию обозначим через $y_j = y(j)$, и интеграл заменим квадратурной формулой численного интегрирования

$$\int_a^b K(x_i, s)y(s)ds = \sum_{j=1}^n K_{ij}y_j h_s + o(h^2). \quad (2.1.18)$$

Разностный аналог сглаживающего функционала (2.1.5) будет иметь вид

$$\Phi_h^\alpha[y_h, f_h] = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n K_{ij}y_j h_s - f_i \right\}^2 h_x + \\ + \alpha \sum_{j=1}^n \left\{ q_j \frac{(y_{j+1} - y_j)^2}{h_s} + p_j y_j^2 h_x \right\}, \quad (2.1.19)$$

где f_i, y – сеточные функции и $k_j > 0, p_j > 0$.

Сеточная функция y_h^α определяется из разностного аналога уравнения Эйлера

$$L^\alpha[y_h] = \alpha \left\{ \frac{1}{h_s^2} \left[q_{j+\frac{1}{2}}(y_{j+1} - y_j) - q_{j-\frac{1}{2}}(y_j - y_{j-1}) \right] - p_j y_j \right\} - \\ - \left\{ \sum_{l=1}^n \bar{K}_{jl} \cdot y_l h_s - b_j \right\} = 0, \quad (2.1.20)$$

$$y_0 = y_1, y_{n-1} = y_n,$$

где

$$\bar{K}_{jl} = \sum_{i=1}^m K_{ij} K_{il} h_x, b_j = \sum_{i=1}^m K_{ij} f_i h_x$$

и k_j и p_j определяются через $k(x), p(x)$ однородной разностной схемой сходящейся к дифференциальной задаче (2.1.15).

Рассмотрим более общий случай численного решения уравнения вида (2.1.1). В этом случае отрезок $[a,b]$ не обязательно совпадает с $[c,d]$, ядро $K(x,s)$ - не симметричная функция. Пусть вместо точных $f(x)$ и $K(x,s)$ известны их приближенные значения $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{K}(x,s)$ такие, что

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (2.1.21)$$

$$\|\tilde{K}(x) - K(x,s)\|_{L_2} \leq \xi. \quad (2.1.22)$$

Рассмотрим сглаживающий функционал А.Н. Тихонова [1].

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \int_c^d \{\tilde{A}[y] - \tilde{f}\}^2 dx + \alpha\Omega[y], \quad (2.1.23)$$

где стабилизирующий функционал имеет вид [1]

$$\Omega[y] = \int_c^d (y^2(s) + qy'^2(s)) ds, \quad (2.1.24)$$

а $\alpha > 0$ - параметр регуляризации, причем в (2.1.23)

$$\tilde{A}[y] = \int_a^b \tilde{K}(x,s)y(s) ds, c \leq x \leq d. \quad (2.1.25)$$

Будем искать элемент y_α , на котором функционал (2.1.23) имеет минимальное значение

$$\Phi_\alpha[y_\alpha, \tilde{f}] = \inf_{y \in Y} \Phi_\alpha[y, \tilde{f}]. \quad (2.1.26)$$

Задача минимизации (2.1.23) решается численно, используя численные методы минимизации. Как известно, это приводит к следующему уравнению Эйлера

$$\alpha[y_\alpha(t) - qy_\alpha''(t)] + \int_a^b T(t,s)y_\alpha(s) ds = F(t), a \leq t \leq b, \quad (2.1.27)$$

где

$$T(t, s) = T(s, t) = \int_c^d \tilde{K}(x, t) \tilde{K}(x, s) dx, \quad (2.1.28)$$

$$F(t) = \int_c^d \tilde{K}(x, t) \tilde{f}(x) dx. \quad (2.1.29)$$

Краевые условия при $s = a$ и $s = b$

$$y_\alpha(a) = y_0 \text{ и } y_\alpha(b) = y_n. \quad (2.1.30)$$

считаем заданными, где h_s - шаг сетки по s .

В результаты вместо некорректной задачи для уравнения Фредгольма первого рода (2.1.1) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода при $q = 0$ или интегро-дифференциальное уравнение при $q = 1$.

С помощью функции Грина $G(x, s)$ для краевой задачи

$$y_\alpha''(t) - y_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b T(t, s) y_\alpha(s) ds - \frac{1}{\alpha} F(t), \quad (2.1.31)$$

$$y_\alpha(a) = y_0, y_\alpha(b) = y_n$$

уравнение (2.1.31) может быть преобразовано в уравнение Фредгольма 2-го рода [1].

$$\begin{aligned} y_\alpha(t) = & \frac{1}{\alpha} \int_a^b \left(\int_a^b G(t, s) T(s, \xi) ds \right) y_\alpha(\xi) d\xi - \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t, s) F(s) ds + \\ & + G'_s(t, b) y_\alpha(b) - G'_s(t, a) y_\alpha(a). \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

В силу этого достаточно ограничиться исследованием интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. При $\alpha > 0$ и $q = 1$ однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. Отсюда следует существование $y_\alpha(x)$. Исследование вопросов сходимости и устойчивости приближенных методов решения линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода проводится согласно общей схеме [52].

Наиболее эффективным способом решения уравнения (2.1.27) является метод квадратурных формул и конечных разностей.

Введем неравномерную x - сетку

$$c = x_1 < x_2 < \dots < x_l = d \quad (2.1.33)$$

в узлах которого задается правая часть $\tilde{f}(x)$, а решение $y_\alpha(s)$ ищется на другой неравномерной s -сетке

$$a = s_1 < s_2 < \dots < s_n = b, \quad (2.1.34)$$

а t -сетка совпадает с s -сеткой.

Интегралы в (2.1.27) заменим приближенной формулой трапеций с переменным шагом, а вторую производную аппроксимируем разностной формулой, учитывая, что $(y_\alpha)_0$ и $(y_\alpha)_{n+1}$ заданными.

Для простоты изложения рассмотрим уравнение (2.1.27) при $q = 0$.

$$\alpha y_\alpha(t) + \int_a^b T(t,s)y_\alpha(s)ds = F(t), a \leq t \leq b. \quad (2.1.35)$$

Заменив интеграл в уравнении (2.1.35) приближенно на квадратурную сумму, мы получим новое уравнение относительно новой неизвестной функции $u_n(x)$:

$$\begin{aligned} A_n[t, u_n] &= \alpha u_n(t) + \sum_{j=1}^n \hbar_j \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t) \tilde{K}(x_i, s_j) u_n(s_j) = \\ &= \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t) \tilde{f}(x_i). \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

Обозначим

$$h_j = s_j - s_{j-1} = t_j - t_{j-1}, j = \overline{1, n+1},$$

$$\hbar_1 = \frac{s_2 - s_1}{2} = \frac{h_2}{2}, \hbar_j = \frac{s_{j+1} - s_{j-1}}{2} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, j = \overline{2, n-1}, \hbar_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{2} = \frac{h_n}{2},$$

$$p_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}, p_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, i = \overline{2, l-1}, p_l = \frac{x_l - x_{l-1}}{2}.$$

Если квадратурная сумма хорошо приближает интеграл, то решение $u_n(t)$ уравнения (2.1.36) близко к решению $y_\alpha(t)$ уравнения (2.1.35). Уравнение (2.1.36) решается следующим образом. Действительно, если $u_n^*(t)$ есть его решение, то числа $\xi_i = u_n^*(t_j)$ обязаны удовлетворять системе уравнений

$$\alpha \xi_k + \sum_{j=1}^n \hbar_j \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t_k) \tilde{K}(x_i, s_j) \xi_j = \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t_k) \tilde{f}(x_i), k = \overline{1, n} \quad (2.1.37)$$

или в матричной форме

$$\bar{A}_n \xi_n = g_n,$$

где $\bar{A}_n = \left\{ \alpha \delta_k^j + \hbar_j \left(\sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t_k) \tilde{K}(x_i, s_j) \right) \right\}$ - матрица коэффициентов системы; g_n - правая часть с элементами $g_k = \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t_k) \tilde{f}(x_i)$, $k = \overline{1, n}$, ξ_n - искомый вектор.

Если $\xi_n^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)$ есть решение системы (2.1.37), то решение $u_n^*(t)$ уравнения (2.1.36) может быть получено по формуле

$$u_n^*(t) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \hbar_j \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t) \tilde{K}(x_i, s_j) \xi_j^* + \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}(x_i, t) \tilde{f}(x_i). \quad (2.1.38)$$

Таким образом, решение уравнения (2.1.36) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (2.1.37).

Сходимость метода исследуется с использованием уравнения (2.1.36). Используя полученные результаты к системе уравнений (2.1.37) доказывается устойчивость. Справедлива следующая теорема сходимости метода квадратур для интегрального уравнения Фредгольма второго рода [52].

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

- 1) ядро $T(x, y)$ и правая часть $F(x)$ интегрального уравнения (2.1.35) непрерывна;
- 2) интегральное уравнение (2.1.35) однозначно разрешимо;
- 3) используемый в (2.1.36) квадратурный процесс сходится.

Тогда:

- a) при достаточно больших n системы линейных алгебраических уравнений (2.1.37), к которым приводит метод квадратур, однозначно разрешимы;
- b) числа обусловленности $\mu_\infty(\bar{A}_n)$ матриц этих систем равномерно ограничены;
- c) приближенные решения $u_n(x)$, построенные по формуле (2.1.38), равномерно сходятся к точному решению $y_\alpha(x)$.

Доказательство.

Для матрицы $\bar{A}_n = \{a_{jk}\}$ ее норма выражается так

$$\|\bar{A}_n\|_\infty = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|\bar{A}_n\|_\infty \leq \alpha + \max_j \sum_{i=1}^n |p_i| \|\tilde{K}(x_i, t_k)\| \|\tilde{K}(x_i, s_j)\| \hbar_k \hbar_j, \leq \alpha + M^2 h^2, \quad (2.1.39)$$

где $h = \max_{1 \leq i \leq n} \{\hbar_i\}$.

Оценка нормы обратной матрицы \bar{A}_n^{-1} в силу компактности интегрального оператора достаточно больших n удовлетворяет неравенству [52]

$$\|\bar{A}_n^{-1}\|_\infty \leq C. \quad (2.1.40)$$

Перемножая оценки (2.1.39), (2.1.40) получим оценку числа обусловленности матриц этих систем

$$\mu_\infty(\bar{A}_n) = \|\bar{A}_n\|_\infty \|\bar{A}_n^{-1}\|_\infty \leq (\alpha + M^2 h^2)C. \quad (2.1.41)$$

Полное доказательство теоремы 1 при $\alpha = 1$ приведено в работе [52]. Поэтому мы остановились лишь в оценке числа обусловленности матриц при численном решении уравнений вида (2.1.36).

В результате дискретизации (2.1.27) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$A_\alpha y_\alpha = F, \quad (2.1.42)$$

где

$$A_\alpha = \alpha C + G, A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad (2.1.43)$$

$$G_{kj} = G_{jk} = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{ik} z_{ij}, k, j = \overline{1, n}, \quad (2.1.44)$$

$$F_k = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{ik} \tilde{f}_i, k = \overline{2, n-1}, \quad (2.1.45)$$

$$F_1 = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{i1} \tilde{f}_i + \frac{\alpha q y_0}{h_1 \rho}, F_n = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{in} \tilde{f}_i + \frac{\alpha q y_{n+1}}{h_{n+1} \rho}, \quad (2.1.46)$$

$$z_{ij} = \hbar_j \tilde{K}_{ij}, i = \overline{1, l}, j = \overline{1, n}, \quad (2.1.47)$$

$$C_{11} = \left(1 + \frac{q}{\hbar_1} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right) \frac{\hbar_1}{\rho},$$

$$C_{kk} = \left(1 + \frac{q}{\hbar_k} \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} \right) \right) \frac{\hbar_k}{\rho}, k = \overline{2, n-1}, \quad (2.1.48)$$

$$C_{nn} = \left(1 + \frac{q}{\hbar_n} \left(\frac{1}{h_n} + \frac{1}{h_{n+1}} \right) \right) \frac{\hbar_n}{\rho}$$

$$C_{kk+1} = -\frac{q}{h_{k+1}\rho}, k = \overline{1, n-1}, C_{k-1} = -\frac{q}{h_k\rho}, k = \overline{2, n}, \quad (2.1.49)$$

остальные элементы $C_{kj} = 0$ (C - трехдиагональная квадратная матрица).

Систему линейных алгебраических уравнений (2.1.42) с матрицей и правой частью (2.1.43) – (2.1.49) можно решать прямыми и итерационными методами. Использовался метод Холецкого. Была составлена программа для численного решения с применением обобщенного принципа невязки выбора α . Алгоритм выполняется в два этапа. На первом этапе для последовательности значений α изменяющимся как убывающая геометрическая прогрессия

$$\alpha_1 > 0, \alpha_i = \theta \alpha_{i-1}, i = 2, 3, \dots, m, 0 < \theta < 1 \quad (2.1.50)$$

определяются решения y_{α_i} из (2.1.42). Вычисляются также значения невязки

$$\beta(\alpha_i) = \sum_{k=1}^l p_k \sum_{j=1}^n \left[z_{kj} (y_{\alpha_i})_j - \tilde{f}_k \right]^2 \quad (2.1.51)$$

и нормы решения

$$\|y_{\alpha_i}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \hbar_j (y_{\alpha_i})_j^2}. \quad (2.1.52)$$

На первом этапе определяется α_F как минимальное значение α_i из условий

$$\alpha_F = \min \left\{ \alpha_i : \beta(\alpha_i) \leq \beta(\alpha_{i-1}), \|y_{\alpha_i}\| \geq \|y_{\alpha_{i-1}}\|_{L_2}, \forall \xi \neq 0 \right\} \quad (2.1.53)$$

находится $\mu = \beta(\alpha_F)$.

При этом

$$\alpha_1 \geq \alpha_F \geq \alpha_p \geq \alpha_m, \quad (2.1.54)$$

где α_p - минимальное значение α_i , при котором еще находится решение СЛАУ (2.1.42).

На втором этапе, из последовательности параметров α определенные по закону (2.1.50) находится значение α_d из условия

$$|\mathbf{x}(\alpha_d)| = \min_{\alpha_i \in [\alpha_F, \alpha_1]} |\mathbf{x}(\alpha_i)|, \quad (2.1.55)$$

где

$$\mathbf{x}(\alpha_i) = \beta(\alpha_i) - (\delta + \xi \|y_{\alpha_i}\|)^2 - \mu. \quad (2.1.56)$$

Затем решается система (2.1.42) с параметром α_d и находится решение $y_{\alpha_d}(s)$.

2.2 Применение метода Г.Н. Положего для численного решения уравнения Фредгольма первого рода

В этом подразделе разработан процесс последовательных приближений для численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с более широкой областью сходимости метода. В основе лежит идея регуляризации и разработанные конструктивные методы сглаживания информации процедурой интегрирования, которые помогают свести решения интегрального уравнения первого рода к интегральному уравнению второго рода.

Хорошо известно [53], что решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода существует и единствено, если ядро симметричное и полно, соответственно система собственных функций полна. Полнота ядра, то есть системы собственных функций, является существенной не только для единственности, но и для существования решения уравнения в L_2 . Только для того узкого класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода единственное решение с точностью до эквивалентности определяется в виде сходящегося в среднем ряду собственных чисел и собственных функций.

В аналитическом обзоре Верлань А.Ф. и Сизиков В.С. [3] приведена широкая область практического применения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Очень подробно описаны методы численного решения уравнения Фредгольма 1-го рода.

Метод регуляризации Тихонова [1, 3] применительно к некорректному интегральному решению уравнению Фредгольма 1-го рода приводит к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода или интегро-дифференциальному уравнению. Авторы работы [5] утверждают противоречивость требований к параметру регуляризации, с одной стороны близость к нулю, с другой стороны приданье, добавленной для регуляризации компонентов определённой «весомости» в сопоставлении с интегралом. Нетривиальность выбора параметра регуляризации отмечает Федоренко Р.П. [54]. Автор данной работы при проведении вычислительных экспериментов

[51] тоже отмечает трудности при выборе, регуляризующего параметра. Ограничения «снизу» на регуляризующий параметр не позволяет достижения требуемой точности приближенного решения.

Выбору и оптимизации методов численной реализации интегрального уравнения Фредгольма второго рода посвящены работы С.В.Переверзева [55]. Среди интегральных методов весьма эффективным является метод Г.Н. Положего [3], который сходится при любом значении параметра, отличным от характеристических чисел.

Метод α -регуляризации Лаврентьева применительно к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода[1, 3]

$$A[x, y] = \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), a \leq x \leq b, \quad (2.2.1)$$

с симметричным положительно определенным ядром $K(x, s)$ заключается в решении следующего уравнения Фредгольма [3]:

$$\int_a^b K(x, s)y_\alpha(s)ds = -\alpha y_\alpha(x) + f(x), a \leq x \leq b. \quad (2.2.2)$$

Поделим уравнение (2.2.2) на α и опуская индекс α получим

$$\frac{1}{\alpha} \int_a^b K(x, s)y(s)ds = -y(x) + \frac{1}{\alpha} f(x), a \leq x \leq b. \quad (2.2.3)$$

Обозначим через $\psi(x)$

$$\psi(x) = -y(x) + \frac{1}{\alpha} f(x). \quad (2.2.4)$$

Подставляя из (2.2.4) $y(x)$ в (2.2.3), получим интегральное уравнение относительно $\psi(x)$

$$\psi(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_a^b K(x, s)\psi(s)ds + \frac{1}{\alpha^2} \int_a^b K(x, s)f(s)ds, c \leq x \leq d. \quad (2.2.5)$$

На интервале определения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (2.2.5) погрешность $\delta(x)$ равна нулю и

$$\delta(x) = \psi(x) + \frac{1}{\alpha} \int_a^b K(x, s)\psi(s)ds - \frac{1}{\alpha^2} \int_a^b K(x, s)f(s)ds = 0. \quad (2.2.6)$$

Для построения итерационного процесса Г.Н.Положего [3] рассмотрим соотношение

$$\psi(x) = \psi(x) - \frac{2\alpha^2}{\sigma} \delta(x) + \frac{2\alpha}{\sigma} \int_a^b K(x, t) \delta(t) dt, \quad (2.2.7)$$

где

$$\sigma \geq \left(\alpha + \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2. \quad (2.2.8)$$

При подстановке $\delta(x)$ в третье слагаемое в правой части (2.2.7) получается второе итерированное ядро

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt, \quad N(x, s) = K_2(x, s) - \frac{2}{\alpha} K(x, s) \quad (2.2.9)$$

На основании соотношения (2.2.7) с учетом (2.2.9) строим итерационный процесс

$$\psi^{n+1}(x) = \psi^0(x) + q\psi^n(x) + \frac{2}{\sigma} \int_a^b N(x, s) \psi^n(s) dx, \quad (2.2.10)$$

где

$$\psi^0(x) = \frac{2}{\sigma} \int_a^b \left[K(x, s) - \frac{1}{\alpha} K_2(x, s) \right] f(s) dx, \quad q = 1 - \frac{2\alpha^2}{\sigma}. \quad (2.2.11)$$

Для численной реализации итерационного процесса (2.2.10) используем наиболее эффективный способ конечных сумм.

Построим неравномерную x -сетку узлов:

$$c = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_l = d, \quad (2.2.12)$$

и неравномерную s -сетку узлов:

$$a = s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_l = b. \quad (2.2.13)$$

Распишем интегралы входящие в (2.2.10) по формуле трапеций с переменном шагом. Получим следующий дискретный аналог (2.2.10):

$$\psi^{n+1}(x_i) = \psi^0(x_i) + q\psi^n(x_i) + \frac{2}{\sigma} \sum_{j=1}^m r_j N_{ij} \psi^n(s_j), i = 1, 2, \dots, l, \quad (2.2.14)$$

где

$$\psi^0(x_i) = \frac{2}{\sigma} \sum_{j=1}^m r_j [K_{ij} - K_{2,ij}] f(s_j), i = 1, 2, \dots, l; \quad (2.2.15)$$

$$K_{2,ij} = \sum_{k=1}^l K_{ik} K_{kj} \sum_{j=1}^m r_j [K_{ij} - K_{2,ij}] f(s_j), i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2.16)$$

где

$$r_1 = \frac{s_2 - s_1}{2}, r_j = \frac{s_{j+1} - s_{j-1}}{2}, j = 2, 3, \dots, m-1, r_m = \frac{s_m - s_{m-1}}{2};$$

$$p_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}, p_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, i = 2, 3, \dots, l-1, p_l = \frac{x_l - x_{l-1}}{2}.$$

Правая часть итерационного процесса (2.2.14) содержит матрицу G умноженную на вектор $\{\psi^n(x_1), \psi^n(x_2), \dots, \psi^n(x_l)\}$

$$G = \begin{pmatrix} q + \frac{2}{\sigma} r_1 K_{2,11} & \frac{2}{\sigma} r_2 K_{2,12} & \frac{2}{\sigma} r_3 K_{2,1} & \dots & \frac{2}{\sigma} r_m K_{2,1m} \\ \frac{2}{\sigma} r_1 K_{2,21} & q + \frac{2}{\sigma} r_2 K_{2,22} & \frac{2}{\sigma} r_3 K_{2,23} & \dots & \frac{2}{\sigma} r_m K_{2,2m} \\ \frac{2}{\sigma} r_1 K_{2,31} & \frac{2}{\sigma} r_2 K_{2,32} & q + \frac{2}{\sigma} r_3 K_{2,33} & \dots & \frac{2}{\sigma} r_m K_{2,3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2}{\sigma} r_1 K_{2,m-1,1} & \frac{2}{\sigma} r_2 K_{2,m-1,2} & \dots & q + \frac{2}{\sigma} r_{m-1} K_{2,m-1,m-1} & \frac{2}{\sigma} r_m K_{2,m-1,m} \\ \frac{2}{\sigma} r_1 K_{2,m,1} & \frac{2}{\sigma} r_2 K_{2,m,2} & \dots & \frac{2}{\sigma} r_m K_{2,m,m-1} & q + \frac{2}{\sigma} r_m K_{2,mm} \end{pmatrix} \quad (2.2.17)$$

Отсюда видно, что матрица G утратила свойство симметричности и положительной определенности, хотя исходный оператор уравнения (2.2.10) этим свойствами обладал, т.к. из (2.2.9) видно, что $K_2(x, s) = K_2(s, x)$.

Для устранения этого недостатка уравнения строка матрицы умножается на $\frac{r_j}{\rho}$, где

$$\rho = \frac{2(r_1 + r_m) + \sum_{j=2}^{m-1} r_j}{m} \quad (2.2.18)$$

Тогда матрица (2.2.17) имеет вид

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} \left(q + \frac{2}{\sigma} r_1 K_{2,11}\right) r_1 & \frac{2}{\sigma} r_1 r_2 K_{2,12} & \frac{2}{\sigma} r_1 r_3 K_{2,1} & \dots & \frac{2}{\sigma} r_1 r_m K_{2,1m} \\ \frac{2}{\sigma} r_2 r_1 K_{2,21} & \left(q + \frac{2}{\sigma} r_2 K_{2,22}\right) r_2 & \frac{2}{\sigma} r_2 r_3 K_{2,23} & \dots & \frac{2}{\sigma} r_2 r_m K_{2,2m} \\ \frac{2}{\sigma} r_3 r_1 K_{2,31} & \frac{2}{\sigma} r_3 r_2 K_{2,32} & \left(q + \frac{2}{\sigma} r_3 K_{2,33}\right) r_3 & \dots & \frac{2}{\sigma} r_3 r_m K_{2,3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2}{\sigma} r_{m-1} r_1 K_{2,m-1,1} & \frac{2}{\sigma} r_{m-1} r_2 K_{2,m-1,2} & \dots & \left(q + \frac{2}{\sigma} r_{m-1} K_{2,m-1,m-1}\right) r_{m-1} & \frac{2}{\sigma} r_{m-1} r_m K_{2,m-1,m} \\ \frac{2}{\sigma} r_m r_1 K_{2,m,1} & \frac{2}{\sigma} r_m r_2 K_{2,m,2} & \dots & \frac{2}{\sigma} r_m r_m K_{2,m,m-1} & \left(q + \frac{2}{\sigma} r_m K_{2,mm}\right) r_m \end{pmatrix} \quad (2.2.19)$$

$\psi^0(x_i)$ определяемой формулой (2.2.15) умножается на $\frac{r_i}{\rho}$,

$$\psi^0(x_i) = \frac{2}{\sigma} \sum_{j=1}^m r_i r_j [K_{ij} - K_{2,ij}] f(s_j), i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.2.20)$$

Коэффициент q определяемый формулой (2.2.11) будет переменной

$$q_i = 1 - \frac{2\alpha^2}{\sigma} \cdot \frac{r_i}{\rho}, i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.2.21)$$

Для проведения методических расчетов рассмотрим следующий пример

$$K(x, s) = x^2 + s, f(x) = 2 + 3x^2.$$

Точное решение которого известно $y(s) = 1 + 6s^2$.

Данное ядро не является симметричным поэтому сделаем преобразование для применения метода регуляризации Тихонова [1]. Тогда для нашего примера по формуле

$$R(x, s) = R(s, x) = xs + \frac{x+s}{3} + \frac{1}{5}.$$

Аналогично преобразуем правую часть

$$F(x) = \int_c^d K(t, x) f(t) dt,$$

и получим, что

$$F(x) = 3x + \frac{19}{15}.$$

Итак, для численного решения рассматривается следующее интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\alpha y_\alpha(x) + \int_0^1 \left(xs + \frac{x+s}{3} + \frac{1}{5} \right) y_\alpha(s) ds = 3x + \frac{19}{15}.$$

Второе итерированное ядро $R_2(x, s)$ вычисляемое по формуле

$$R_2(x, s) = \int_0^1 R(x, t) R(t, s) dt$$

будет тоже симметричным

$$R_2(x, s) = \frac{13}{9} xs + \frac{x+s}{3} + \frac{97}{675}.$$

Получено следующее графическое изображение численных результатов (рисунок 2), демонстрирующие неудовлетворительную сходимость к точному решению.

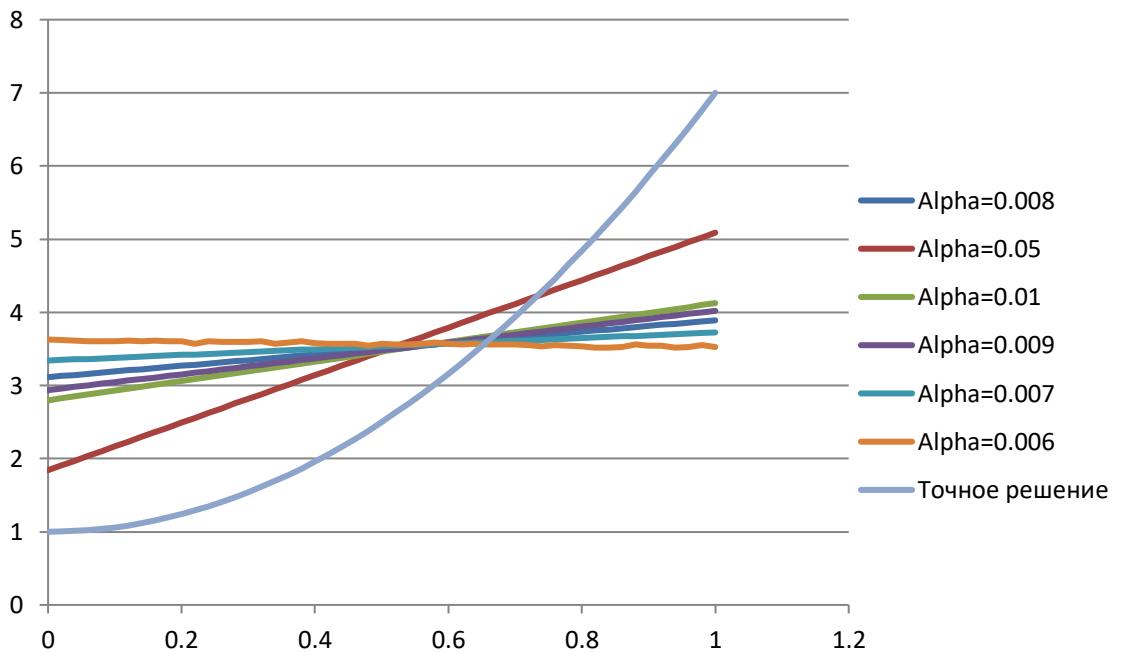


Рисунок 2 – Точное решение и приближенные, полученные методом Г.Н.Положего.

2.3 Конструктивный подход с «сопровождением» и решение интегральных уравнений Фредгольма первого рода

В работе [5] предложен конструктивный подход к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода основанный на трансформированный формулировке корректной задаче с ядром Пуассона. Интегральное уравнение распространяется на расширенный интервал и используется процедура сглаживания данных о решении с помощью интегрирования. В этом

оригинальном подходе используется легко обратимый интегральный оператор «сопровождения» с ядром Пуассона. Разработанный алгоритм базируется на рациональном синтезе потенциала гармонического ряда с рядом Фурье. В результате преобразований задача сводится к численной реализации интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

В данной работе рассматриваются вопросы численной реализации предложенного в [5] подхода и актуальные аспекты оптимизации алгоритма с учетом структуры свободного члена. Выбор метода численной реализации вспомогательного интегрального уравнения является предметом дальнейших исследований.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$(Ay)(x) = \int_0^1 K(x, s)y(s)ds = f(x). \quad (2.3.1)$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, $K(x, t)$ – ядро интегрального уравнения (2.3.1) и предполагается, что ядро определено в квадрате $P = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ на плоскости (x, s) и непрерывно в P , либо разрывы таковы, что двойной интеграл $\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)dxds$ имеет конечное значение. Функция $f(x)$ предполагается непрерывный или имеющий разрывы 1-го рода.

Пусть $\delta(x)$ погрешность решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2.3.1) и представим ее как разность между искомой функцией и интегралом от неё [3]

$$\delta(x) = y(x) - \lambda(By)(x) = 0, x \in [0, 1], \quad (2.3.2)$$

где λ – параметр, $y(x), x \in [-1, 0]$ – новая неизвестная функция; оператор

$$(By)(x) = \int_{-1}^1 h(x, \xi)y(\xi)d\xi. \quad (2.3.3)$$

С широким интервалом интегрирования чем в (2.3.1), с ядром Пуассона

$$h(x, \xi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos[2\pi(x - \xi)] + r^2}, 0 \leq r \leq 1. \quad (2.3.4)$$

Все предпосылки представления уравнения (2.3.1) в виде интегрального уравнения (2.3.2) и свойства интеграла Пуассона для построения конструктивного метода изложены в работе [5].

Для построения численных алгоритмов используем следующую реструктуризацию уравнений (2.3.1), (2.3.2)

$$y(x) = \lambda(By)(x) + \begin{cases} \mu[(Ay)(x) - f(x)], & x \in [0, 1] \\ g(x), & x \in [-1, 0] \end{cases}, \quad (2.3.5)$$

где μ – параметр, $g(x), x \in [-1, 0]$ – новая неизвестная функция.

Из (2.3.5) видно, что к правой части (2.3.2) прибавляется «нуль» из (2.3.1).

Представим функцию $y(x)$ в виде суммы двух функций

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x), x \in [-1, 1]. \quad (2.3.6)$$

Рассматриваем две задачи

$$y_0(x) = \begin{cases} \mu(Ay_0)(x) - \mu f(x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \in [-1, 0] \end{cases}, \quad (2.3.7)$$

$$y_1(x) = \lambda(By_1)(x) + \begin{cases} \mu(Ay_1)(x) - \mu f_1(x), & x \in [0, 1] \\ g(x), & x \in [-1, 0] \end{cases}, \quad (2.3.8)$$

где свободный член

$$f_1(x) = \lambda \int_0^1 h(x, \xi) y_0(\xi) d\xi. \quad (2.3.9)$$

Обращение оператора $E - \lambda B$ в уравнении (2.3.8) приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции y_1

$$y_1(x) = \mu \left\{ (Ay_1)(x) + \lambda \left[\frac{1}{\mu} \int_{-1}^0 H(x, \xi, \lambda) g(\xi) d\xi + \int_0^1 H(x, \xi, \lambda) (Ay_1)(\xi) d\xi \right] \right\} + \\ + f_2(x), x \in [0, 1]. \quad (2.3.10)$$

где свободный член

$$f_2(x) = f_1(x) + \lambda \int_0^1 H(x, \zeta, \lambda) f_1(\zeta) d\zeta. \quad (2.3.11)$$

$H(x, \zeta, \lambda)$ – резольвентадля ядра $h(x, \xi)$

$$H(x, \zeta, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Phi_s(x)\Phi_s(\xi)}{\lambda_s - \lambda}, \quad (2.3.12)$$

где λ_s и $\Phi_s(x)$ характеристические числа и собственные функции уравнения (2.3.2) с пределами интегрированиями от -1 до 1.

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, \lambda_{2n-1} = \lambda_n = \frac{1}{2}r^{-n}, n = 1, 2, \dots; \quad (2.3.13)$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \Phi_{2n-1} = \cos(2n\pi x), \Phi_{2n} = \sin(2n\pi x), n = 1, 2, \dots \quad (2.3.14)$$

Таким образом, для определения $y_0(x)$ и $y_1(x)$ получаются интегральные уравнения (2.3.7) и (2.3.10) соответственно.

Для численных расчетов был рассмотрен пример из подпункта 2.2. Ниже приведены результаты сравнения приближенного решения полученного методом с «сопровождением» с точным решением (рисунок 3).

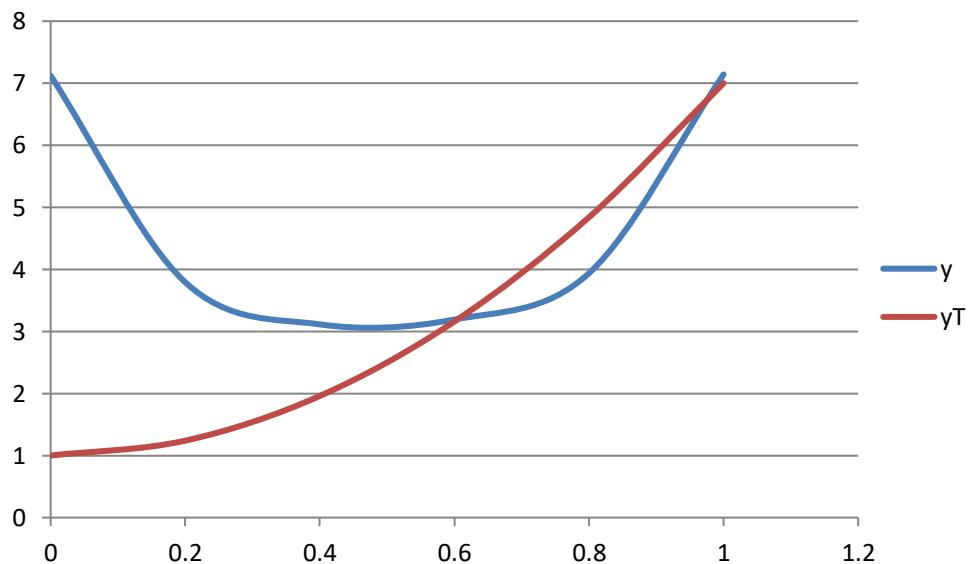


Рисунок 3 – Точное (y_t) и приближенное(y) решения, полученное методом с «сопровождением»

2.4 Алгоритм метода сопряженных уравнений для обработки большого количества данных при выявлении аномалий распределения химических элементов

Рассмотрим алгоритм метода сопряженных уравнений для обработки большого количества данных при выявлении аномалий распределения химических элементов на редкометальных месторождениях [56, 57]. Математическая задача заключается в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода для большого количества различных правых частей.

В сопряженном уравнении ядро интегрального уравнения остается одним и тем же. Представленный алгоритм решения задачи разбивается на два этапа. На первом этапе решается ряд задач, в которых не участвует правая часть интегрального уравнения. Используя результаты вычислений первого этапа, искомое решение интегрального уравнения для конкретной правой части на втором этапе вычисляется при помощи двух суммирований. Такой алгоритм позволяет первый этап вычислений провести заранее, до выезда “в поле”, простота второго этапа позволяет проводить обработку данных “в поле” в режиме реального времени.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, y] = \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), x \in [a, b]. \quad (2.4.1)$$

Необходимо одно и то же интегральное уравнение (2.4.1) решить для различных правых частей.

Решение интегрального уравнения (2.4.1) связано с задачей выявления аномалий при исследовании пространственного распределения химических элементов на редкометальных месторождениях [1]. При работе “в полях” приходится обрабатывать большое количество реальных данных, которые в уравнении (2.4.1) играют роль правых частей $f(x)$, при этом ядро $K(x, s)$ не меняется.

Предложим численную процедуру решения интегрального уравнения (2.4.1), которая позволит разбить численное решение задачи на два этапа: первый не зависит от $f(x)$, второй будет зависеть.

Для преобразования постановки задачи (2.4.1) воспользуемся методом сопряженного оператора, предложенного в [58], и хорошо зарекомендовавшего себя при решении задачи Коши для эллиптического уравнения на реальных данных [59-62].

Рассмотрим сопряжённое уравнение:

$$\int_a^b K(x, s)v_k(s)ds = \alpha_k(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.4.2)$$

Здесь $\alpha_k(x)$ – известные функции, которые будут определены позже, k – номер, $v_k(s)$ – решение сопряжённого уравнения (2.4.2), зависящее от номера k .

Умножим (2.4.1) на $v_k(x)$ и проинтегрируем по x :

$$\int_a^b v_k(x) \int_a^b K(x, s)y(s)ds dx = \int_a^b v_k(x)f(x)dx, x \in [a, b].$$

Так как

$$\int_a^b K(s, x) v_k(x) dx = \alpha_k(s),$$

меняя порядок интегрирования и учитывая (2.4.2), получим

$$\int_a^b y(s) \alpha_k(s) ds = \int_a^b v_k(x) f(x) dx. \quad (2.4.3)$$

Пусть $\alpha_k(x)$ — базисные функции на отрезке $[a, b]$, тогда первый интеграл в (2.4.3) — это k -ый коэффициент в разложении функции $y(x)$ в ряд Фурье, т.е. из (2.4.3) следует

$$y_k = \int_a^b v_k(x) f(x) dx,$$

$$y(x) = \sum_{k=1}^N y_k \alpha_k(x). \quad (2.4.4)$$

Таким образом, решение задачи (2.4.1) разбивается на два этапа:

- 1) решение уравнений (2.4.2);
- 2) вычисление коэффициентов Фурье и суммирование (2.4.4).

Легко видеть, что этап 1 является сложным, но он может быть выполнен заранее, до получения данных $f(x)$; для решения задач (2.4.2) может быть применен любой выбранный метод, который давал бы решение этих задач с удовлетворительной точностью. Этап 2 является технологичным, поскольку это всего лишь два суммирования; такие действия могут быть выполнены “в поле” в режиме реального времени.

Таким образом, этап 1 является подготовительным, на этом этапе вычисляются и запоминаются функции $v_k(x)$. Этап 2 может быть выполнен в режиме реального времени на месте получения данных $f(x)$. На этом этапе при обработке вновь полученных функций $f(x)$ используют известные функции $v_k(x)$.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, y] = \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), x \in [c, d]. \quad (2.4.1 *)$$

Будем полагать, что $K(x, s)$ есть вещественная непрерывная симметричная функция в области $D = \{a \leq s \leq b, c \leq x \leq d\}$, $f(x) \in L_2[c, d]$, $y(s) \in W_2^1[a, b]$.

Тогда существует полная ортонормированная система собственных функций $\alpha_n(x)$ оператора A

$$A[x, \alpha_n] = \int_a^b K(x, s) \alpha_n(s) ds = \lambda_n \alpha_n(x),$$

$$(\alpha_i(x), \alpha_j(x)) = \delta_i^j,$$

где δ_i^j - символ Кронекера.

При этом

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n(x) \alpha_n(s)$$

сходимость ряда в правой части понимается в норме:

$$\|F(x, s)\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |F(x, s)|^2 dx ds}$$

Из предыдущего соотношения следует, что

$$\|K\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < M^2$$

и следовательно, $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_k \rightarrow 0$ при $1 \leq k \leq N$ и все $\lambda_k = 0$ при $k > N$.

Рассмотрим интегральное уравнение (2.4.1*) при $a = c$, $b = d$ и $K(x, s) = K(s, x)$. В этом случае интегральные уравнения (2.4.2) с заданными правыми частями являются сопряженными к уравнению (2.4.1).

Теорема 2. Если 1) ядро $K(x, s)$ интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2.4.1*) является вещественной, симметричной непрерывной функцией; 2) сопряженное интегральное уравнение с правой частью в виде собственных функций $\alpha_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ имеет решение $v_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, тогда решение интегрального уравнения (2.4.1*) можно представить в виде ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \alpha_k(x) \quad (2.4.3)$$

и коэффициенты определяются решением сопряженного уравнения

$$y_k = \int_a^b f(x) v_k(x) dx, k = 1, 2, \dots \quad (2.4.4)$$

Доказательство.

Используем теорию сопряженных уравнений [6] для численного решения задачи (2.4.1). Для этого уравнение (2.4.1*) умножим скалярно на $v_k(x)$, а уравнение (2.4.2) на $y(x)$ и отнимем из первого уравнение второе

$$\begin{aligned} & \int_a^b v_k(x) \left[\int_a^b K(x, s) y(s) ds \right] dx - \int_a^b y(x) \left[\int_a^b K(s, x) v_k(s) ds \right] dx = \\ & = \int_a^b f(x) v_k(x) dx - \int_a^b \alpha_k(x) y(x) dx \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Согласно тождеству Лагранжа левая часть (2.4.5) равна нулю, поэтому имеем

$$\int_a^b f(x) v_k(x) dx - \int_a^b \alpha_k(x) y(x) dx = 0. \quad (2.4.6)$$

Тогда подставляя (2.4.3) в (2.4.6) получим (2.4.4)

$$y_k = \int_a^b f(x) v_k(x) dx, k = 1, 2, \dots$$

Теорема 2 доказана.

В рассматриваемом случае $\lambda_k = 0$ при $k > N$ и решение уравнения (2.4.1*) можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^N y_k \alpha_k(x). \quad (2.4.7)$$

Таким образом, решение задачи (2.4.1) разбивается на два этапа:

1.решение уравнений (2.4.2) и нахождения $v_k(x)$ регуляризующими или проекционными методами;

2.вычисление коэффициентов Фурье по формуле (2.4.4) и вычисление суммы (2.4.7).

При обработке больших площадей область делится на стандартные участки, на которых измеряются данные $f(x)$ [57]. В этом случае, поскольку экспериментальные данные представлены в координатах Гаусса-Крюгера, имеем $a = 1.45 \cdot 10^7$ м и $b = 1.472612 \cdot 10^7$ м. Удобно провести обезразмеривание, тогда $a = 1.45$, $b = 1.472612$.

Параметр N (количество базисных функций) может быть выбран из следующих условий. Поскольку на практике известна точность, с которой измеряются данные $f(x)$, то параметр N можно выбирать из условия выполнения следующего неравенства:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^N f_k \alpha_k(x) \right\| \leq \delta, \quad (2.4.9)$$

где f_k — коэффициенты в разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье, $\alpha_k(x)$ – базисные функции на отрезке $[a, b]$. Поскольку все функции измеряются примерно с одной и той же точностью, то достаточно взять несколько функций $f(x)$, разложить в ряд Фурье и выбрать оптимальное N , которое удовлетворяет неравенству (2.4.9). При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье необходимо помнить, с каким интервалом регистрируются значения функции $f(x)$ на профиле, это определяет максимальную частоту (частота Найквиста) при разложении данной функции в ряд (см., например, [63]). Далее для обработки данных можно использовать уже известное значение параметра N .

Ядро имеет вид [1]:

$$K(x, s) = \frac{h}{\pi((x - s)^2 + h^2)}, \quad (2.4.10)$$

где h – уровень, расположенный ниже поверхности земли.

Из особенностей постановки и решения геохимической задачи выявления аномалий пространственного распределения химических элементов на редкометальных месторождениях, известно [1, 57]

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (2.4.11)$$

Равенства (2.4.11) позволяют выбрать базисные функции на интервале $[a; b]$ в следующем виде:

$$\alpha_k(x) = \sin \frac{\pi k(2x - (b + a))}{b - a}. \quad (2.4.12)$$

Численно интегральные уравнения (2.4.2) решались методом, предложенным и реализованным в [50]. Далее кратко опишем его здесь.

К уравнению (2.4.2) применяется регуляризация М.М. Лаврентьева [2]. Рассматриваются интегральные уравнения вида

$$\mu v_k(x) + \int_a^b K(s, x)v_k(s)ds = \alpha_k(x), k = \overline{1, N}, \quad (2.4.13)$$

где μ – малый параметр регуляризации М.М.Лаврентьева.

Осуществляется дискретизация с равномерным шагом $h = \frac{b-a}{M}$ и $x_i = a + +(i - 0.5)h$, $s_j = a + (j - 0.5)h$ ($i, j = \overline{1, M}$), M – количество точек разбиения интервала $[a, b]$. В этом случае необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$A\omega_k = \beta_k, k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4.14)$$

где

$$A = \mu E + h \begin{bmatrix} K(s_1, x_1) & K(s_1, x_2) & \dots & K(s_1, x_M) \\ K(s_2, x_1) & K(s_2, x_2) & \dots & K(s_2, x_M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_M, x_1) & K(s_M, x_2) & \dots & K(s_M, x_M) \end{bmatrix},$$

$$\omega_k = \begin{bmatrix} v_k(x_1) \\ v_k(x_2) \\ \dots \\ v_k(x_M) \end{bmatrix}, \beta_k = \begin{bmatrix} \alpha_k(x_1) \\ \alpha_k(x_2) \\ \dots \\ \alpha_k(x_M) \end{bmatrix}.$$

В работе [50] для численного решения уравнений (2.4.14) применялись метод квадратного корня и итерационный метод

$$B \frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\tau} + A\omega_k^n = \beta_k, \quad (2.4.15)$$

где B – легко обратимая матрица.

2.5 Двумерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

Рассмотрим двумерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A(x, y, V) = \int_a^b ds \int_c^d K_z(x, y, \xi, t)V(\xi, t)d\eta = U(x, y), \quad (2.5.1)$$

$$\bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq y \leq \bar{d}$$

Будем полагать, что $K_z(x, y, s, t)$ есть вещественная непрерывная в области $D_1 \times D_2$, $D_1 = \{a \leq s \leq b; c \leq t \leq d\}$, $D_2 = \{\bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq y \leq \bar{d}\}$, функция. Пусть, далее $U(x, y) \in L_2(D_2)$, $V(s, t) \in W_2(D_1)$. Предположим, что в место точных $U(x, y)$ и $K(x, y, s, t)$ известны их приближенные значения $\tilde{U}(x, y)$ и $\tilde{K}(x, y, s, t)$ такие, что

$$\|\tilde{U}(x, y) - U(x, y)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (2.5.2)$$

$$\|\tilde{K}(x, y, s, t) - K(x, y, s, t)\| \leq \xi. \quad (2.5.3)$$

Введем сглаживающий функционал

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha[V, \tilde{U}] &= \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} [\tilde{A}(x, y, V) - \tilde{U}(x, y)]^2 dx dy + \\ &+ \alpha \int_a^b \int_c^d \left[\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)^2 + p(s, t) \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)^2 \right] ds dt, p(s, t) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

причем

$$\tilde{A}(x, y, V) = \int_a^b ds \int_c^d \tilde{K}(x, y, s, t) V(s, t) dt, (x, y) \in D_2.$$

Из условия минимума Φ_α следует уравнение Тихонова (являющееся уравнением Эйлера для экстремальной задачи)

$$\Phi_\alpha[V_\alpha, \tilde{U}] = \inf_{V \in W_2^1(D_1)} \Phi_\alpha[V, \tilde{U}]. \quad (2.5.5)$$

Уравнение Эйлера для (2.5.4), (2.5.5) имеет вид

$$\begin{aligned} &- \alpha \left(\frac{\partial^2 V(s, t)}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(p(s, t) \frac{\partial V(s, t)}{\partial t} \right) \right) + \\ &+ \int_a^b \int_c^d T(\xi, \eta, s, t) V(\xi, \eta) d\xi d\eta = b(s, t), \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

где

$$T(\xi, \eta, s, t) = \iint_{D_2} K(x, y, \xi, \eta) K(x, y, s, t) dx dy, \quad (2.5.7)$$

$$b(s, t) = \iint_{D_2} U(x, y) K(x, y, s, t) dx dy, \quad (2.5.8)$$

Метод кубатурных формул в применении к уравнению (2.5.1) заключаются в том, что интегралы заменяются конечной суммой, по формулам численного интегрирования. Производные от решения заменяются конечными разностями.

Для построения дискретного аналога (2.5.6) введем неравномерную сетку

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b, \quad (2.5.9)$$

$$c \leq y_1 < y_2 < \dots < y_m \leq d, \quad (2.5.10)$$

Сетки узлов по s и t сделаем совпадающими с сетками (2.5.9) и (2.5.10) соответственно, т.е.

$$s_i = x_i, t_j = y_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m},$$

где n - число узлов по x (или s), а m - число узлов по y (или t).

В результате метод кубатур сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений с четырехмерной матрицей и двухмерной правой частью

$$\alpha \left(V_{\bar{s}s, y} + (p_{ij} V_{t, ij})_{\bar{t}} \right) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m T_{ijkl} V_{kl} \hbar_{x,k} \hbar_{y,l} = -b_{ij},$$

$$i = \overline{2, n-1}, j = \overline{2, m-1},$$

где

$$T_{ijkl} = \sum_{i_V=1}^n \sum_{j_V=1}^m K(x_{i_V}, y_{j_V}, \xi_k, \eta_l) K(x_{i_V}, y_{j_V}, s_i, t_j) \hbar_{x,i_V} \hbar_{y,j_V}, \quad (2.5.11)$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m U(x_k, y_l) K(x_k, y_l, s_i, t_j) \hbar_{x,k} \hbar_{y,l}, \quad (2.5.12)$$

$$V_y = V(s_i, t_j), \quad (2.5.13)$$

$$\hbar_{x,i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, \hbar_{y,j} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2}, \quad (2.5.14)$$

$$i = \overline{2, n-1}, j = \overline{2, m-1}.$$

Далее группируя коэффициенты решения в узлах $(i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{t_{x,i}^2} V_{i+1,j} - \left(\frac{2\alpha}{\hbar_{x,i}^2} + \frac{\alpha p_{ij+\frac{1}{2}}}{\hbar_{y,j}^2} + \frac{\alpha p_{ij-\frac{1}{2}}}{\hbar_{y,i}^2} \right) V_{ij} + \frac{\alpha}{\hbar_{x,i}^2} V_{i-1,j} + \frac{\alpha p_{ij+\frac{1}{2}}}{\hbar_{y,j}^2} V_{ij+1} + \\ & + \frac{\alpha p_{ij-\frac{1}{2}}}{\hbar_{y,j}^2} V_{ij-1} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m T_{ijkl} V_{kl} \hbar_{x,k} \hbar_{y,l} = -b_{ij}, \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

$$i = \overline{2, n-1}, j = \overline{2, m-1}$$

Система уравнений (2.5.15) решается итерационными методами.

2.6 Численный анализ

Пример 1. Тестирование предлагаемого в п 2.4 двухэтапного подхода численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода проведено при следующих входных данных. Ядро интегрального уравнения выбиралось равным

$$K(x, s) = \frac{1}{x^2 + s^2}.$$

Правая часть

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \ln \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} - \frac{b+a}{b-a} \cdot \frac{1}{x} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a}{x} \right).$$

При этом точное решение имеет вид

$$u(x) = \frac{2x - (b+a)}{b-a}.$$

Базисные функции выбраны в следующем виде

$$\alpha_k(x) = \sin \frac{\pi k(2x - (b + a))}{b - a},$$

и $a = -1, b = 1$. Пример взят из [64]. Видно, что функция не удовлетворяет условию $u(a) = u(b) = 0$, тем не менее, она может быть разложена в ряд по функциям $\alpha_k(x)$ [64, с.52, №41]. Результаты численных расчетов по предложенному алгоритму (2.4.2), (2.4.7), (2.4.8) приведены на рисунках 4А, В.

Для численного решения задач (2.4.2) используется регуляризующий метод Лаврентьева [27, 50]. Осуществлялась дискретизация с равномерным шагом

$$h = (b - a)/M \text{ и } x_i = a + (i - 0.5)h, s_j = a = (j - 0.5)h, i, j = \overline{1, M},$$

где – M количество точек разбиения интервала $[a, b]$.

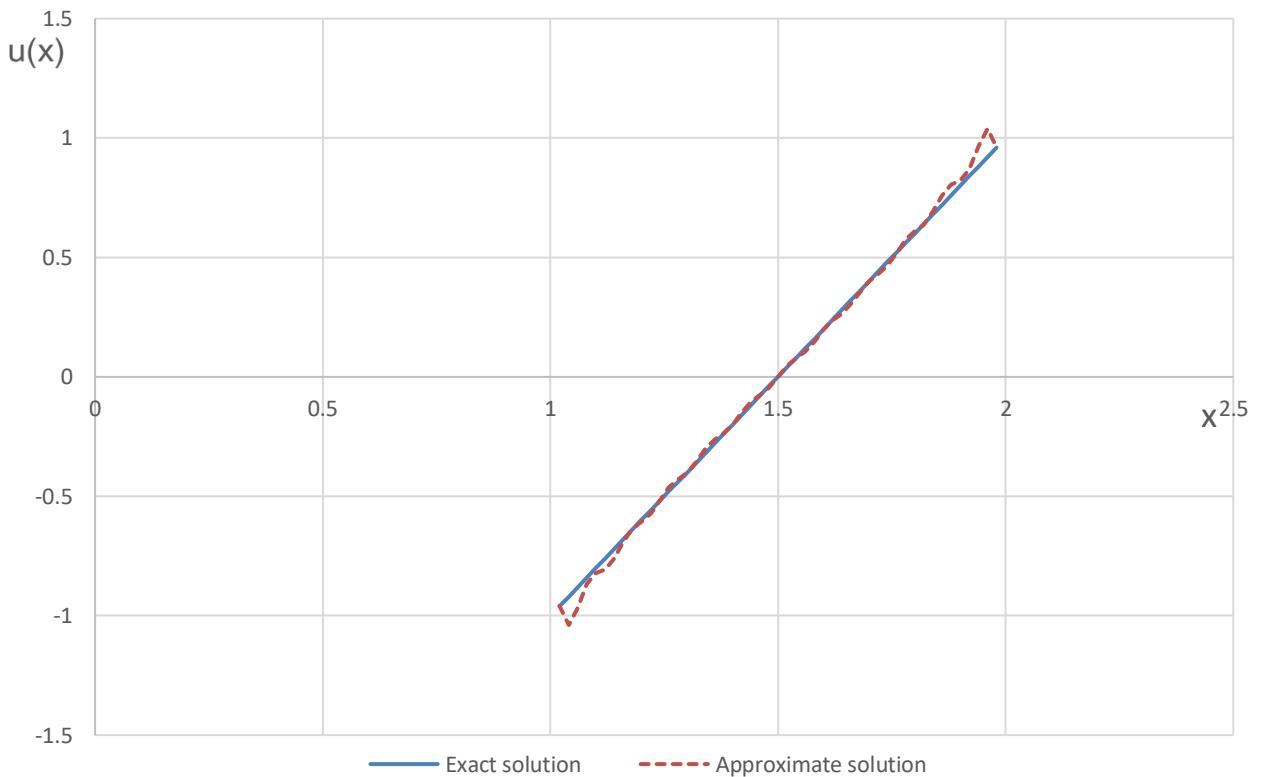


Рисунок 4А - Точное (непрерывная линия) и приближенное решение (прерывистая линия) для $M = 60$

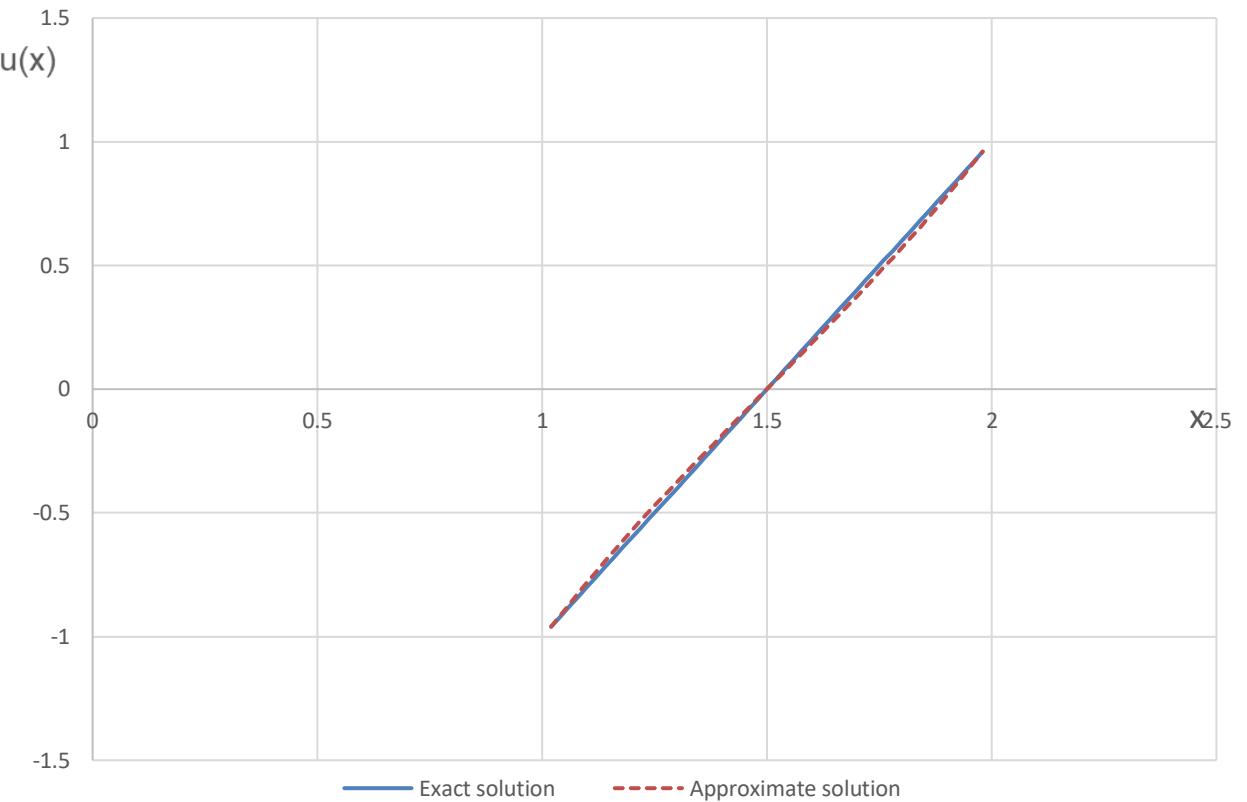


Рисунок 4В - Точное (непрерывная линия) и приближенное решение (прерывистая линия) для $M = 1000$

При тестировании предлагаемого подхода, регуляризующий параметр выбирался равным $\mu = 0.004$, максимальное количество узлов сетки M равнялось 1000, количество базисных функций $n = 50$, решение вычислялось с точностью до 10^{-4} , для чего требовалось от 90 до 100 тыс. итераций. Абсолютная ошибка между точным и посчитанным решениями не превышала 0.03, относительная – 3%.

Пример 2. Для тестирования метода регуляризации Тихонова, описанного в 2.1 выбран пример из подпункта 2.2

$$K(x, s) = x^2 + s,$$

с правой частью

$$f(x) = 2 + 3x^2,$$

точное решение

$$y(s) = 1 + 6s^2.$$

Для численного расчета были выбраны следующие параметры $n = 50, l = 50, a = 0, b = 1, c = 0, d = 1, \xi = 0 \div 10^{-6}, \delta_f = 0 \div 10^{-6}, \alpha_1 = 4, \alpha_m = 4 \cdot 10^{-4}, \theta = 10^{-\frac{4}{9}}$. При этом $m = 10, \alpha_m = 4 \cdot 10^{-4}$.

Параметр $\aleph(\alpha_i)$ меняется от $\aleph(\alpha_1) = 0.429208$ до $\aleph(\alpha_8) = 0.004837$ и $\aleph(\alpha_9) = -0.29 \cdot 10^{-10}$.

Поэтому $\alpha_d = 0.00111302$, $\sqrt{\beta_{\alpha_d}} = 0.02208$, $\sqrt{\beta_{\alpha_d}} / \|\tilde{f}\|_{L_2} = 0.00705$, $\mu = 0.00048774$, $\|y_{\alpha_d}\|_{L_2} = 3.56539$, $\Phi_{\alpha_d}[y_{\alpha_d}, \tilde{f}] = 0.01464$.

Результаты приближенного и точного решения показаны в виде графика на рисунке 5. Приведены результаты многочисленных методических расчетов для различных значений α в диапазоне от 0.0008 до 0.01. Из рисунка 5 видно, что при увеличении параметра регуляризации α , то есть при $\alpha = 0.05$ численное решение наилучшим образом приближается к точному.

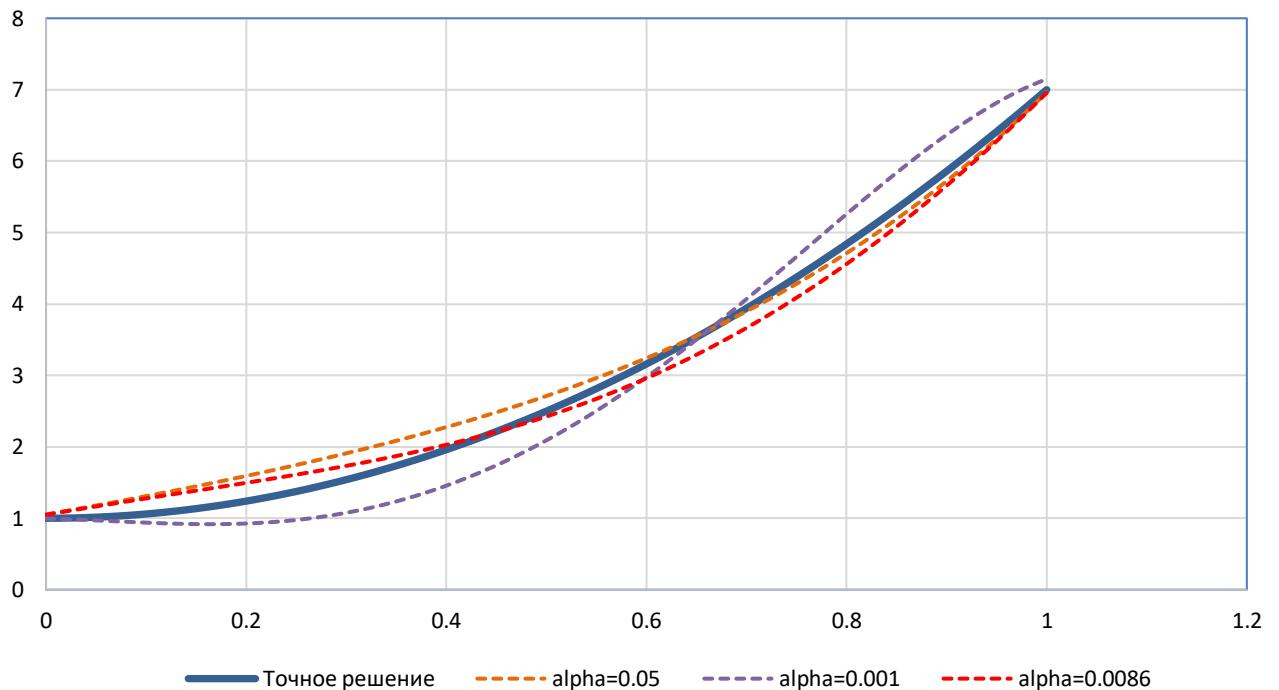


Рисунок 5 – Точное и приближенные решения задачи при различных параметрах регуляризации

Пример 3. Для проведения методических расчетов по предложенному в п.2.5 алгоритму решения двумерных уравнений Фредгольма первого рода рассмотрим следующий пример [26]

$$K(x, y, s, t) = \frac{x}{(8 + y)(1 + s + t)}, f(x, y) = \frac{x}{6(8 + y)} \quad (2.6.1)$$

$$a = 0, b = 1, c = 0, d = 1.$$

Двумерное интегральное уравнение с ядром и правой частью определенной в виде (2.6.1) имеет точное решение

$$V(s, t) = \frac{1}{(1 + s + t)^2} \quad (2.6.2)$$

Для численного расчета двумерного уравнения Фредгольма первого рода были выбраны следующие параметры $\alpha = 0.000001, \varepsilon = 0.0000001, \delta = 10^{-7}, \xi = 10^{-7}$.

В результате численного решения предложенным алгоритмом, получены следующие параметры $\beta = 0.000112, \mu = 0.000112, \gamma = 0.1159332, \zeta = 0.0001112, \kappa = 0.000112$. Количество итераций равно 943.

Результаты расчетов предложенного выше примера приведены в виде графиков (рисунки 6А, В) при $n = 20, m = 20$.

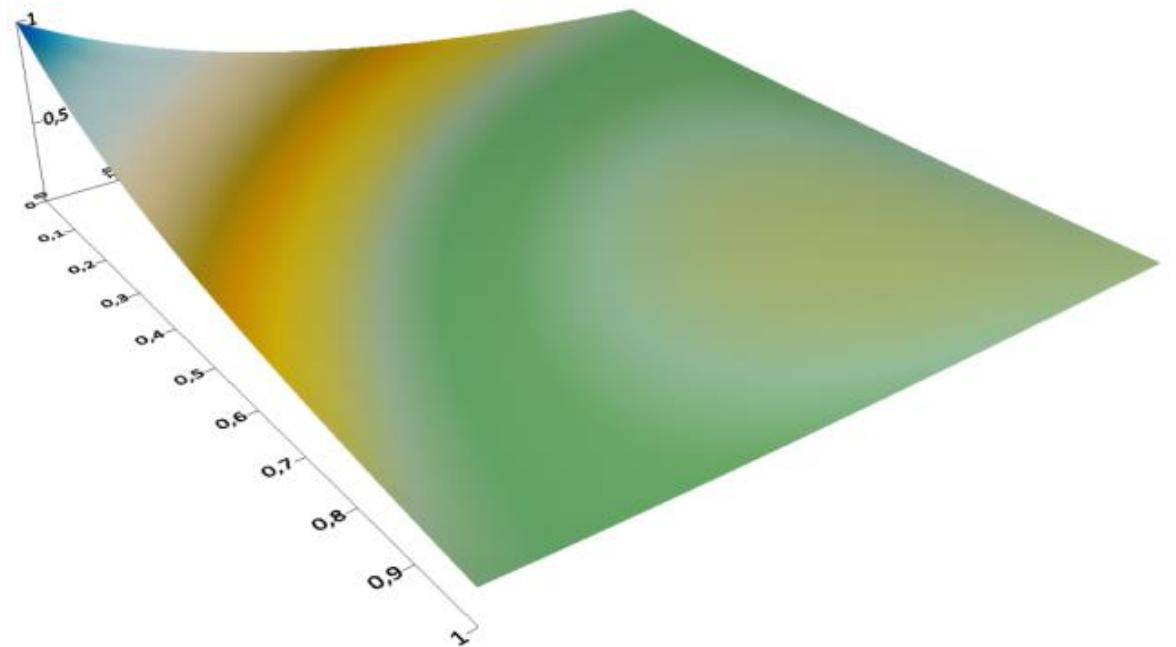


Рисунок 6А– Приближенное решение

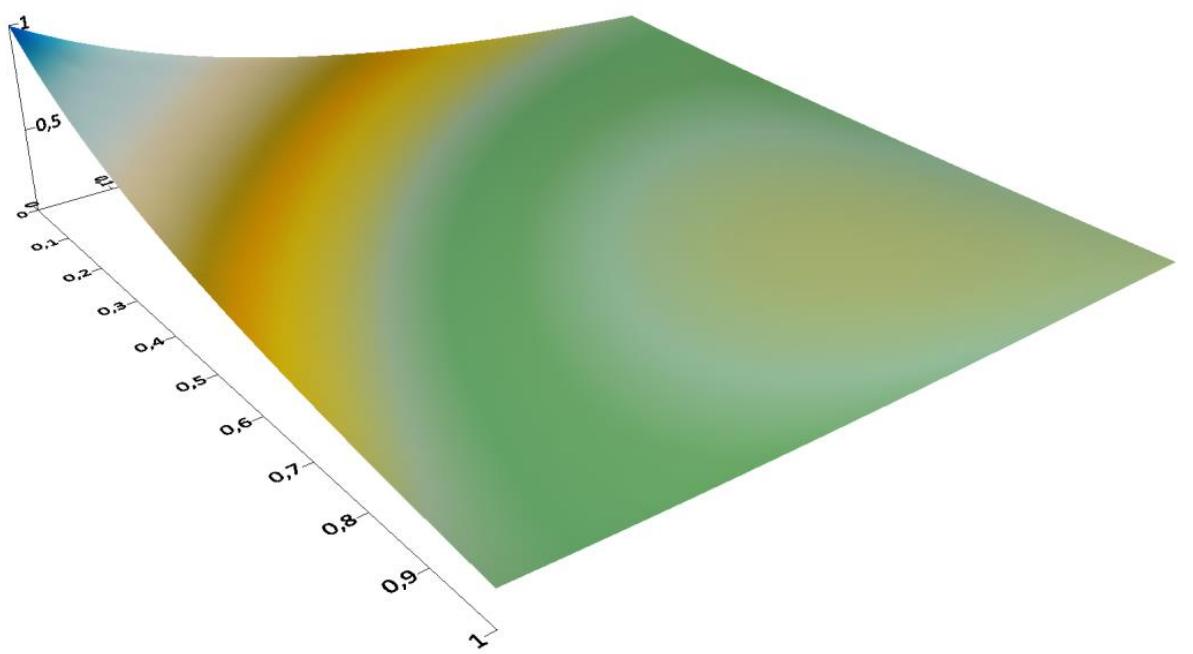


Рисунок 6В– Точное решение

3 ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА С БАЗИСАМИ В ВИДЕ ВЕЙВЛЕТОВ ЛЕЖАНДРА

В этой главе использованы вейвлеты Лежандра для численного решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода в проекционном методе Галеркина-Бубнова. Так же рассмотрены вопросы получения априорных оценок и сходимости проекционных методов с базисами в виде вейвлетов Лежандра на полуинтервалах. Для проведения сравнительного анализа проведены численные расчеты решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом регуляризации Лаврентьева, методом Положего, конструктивным методом с «сопровождением» и методом Бубнова-Галеркина с вейвлетами Лежандра.

В справочнике А.Ф.Верлань, В.С.Сизиков [3] изложены методы численного решения широкого класса интегральных уравнений, описаны алгоритмы и программы.

Несмотря на достаточно хорошую фундаментальную исследованность в последние годы возрастает интерес к численному решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Эти новые исследования основаны в основном на проекционные методы. Научных работ посвященных численному решению уравнений Фредгольма первого рода не так много, а интегральные уравнения второго рода изучаются довольно успешно. В работе [65] предложен новый вычислительный метод основанный на использовании В – сплайновых квазиафинных систем с плотными рамками, созданных на основе принципов унитарного и косого расширения. Используя квазиаффиные фреймлетные системы интегральные уравнения преобразуются в систему линейных уравнений. Для иллюстрации эффективности предлагаемого метода проведены численные расчеты, результаты которых показывают высокую точность. В работе [66] приводится алгоритм численного решения слабо сингулярных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма с использованием квазиафинного биортогонального вейвлета в методе коллокационного типа.

В работе [67] предложен каркасный метод, основанный на В-сплайновых функциях, для решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Фредгольма. Проведенные численные расчеты показывают хорошую сходимость к точному решению по сравнению с методами полученным с помощью вейвлетов.

Работы [68, 69] посвящены разработке численных методов для нечетких интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для аппроксимации этих уравнений используются полиномы Чебышева, таким образом сочетается классическая теория с нечеткой задачей.

В статье DiYuan, Xinming Zhang [15] сделан обзор численных методов интегрального уравнения Фредгольма первого рода которая описывает многие задачи инженерных технологий. В этой статье [15] подробно представлены различные численные методы решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Исследованы вопросы существования, устойчивости и сходимости решения интегрального уравнения.

В работе N.Hosseiniadeh, M.Dehghan, Z.Sedaghatjoo [23] рассмотрены вопросы устойчивости численного решения интегрального уравнения

Фредгольма первого рода с радиальными ядрами. Подробный интерполяцией математически доказано, что интегральные операторы имеющие радиальные ядра с положительным преобразованием Фурье строго положительно определены. Явно определена нижняя оценка собственных значений этого интегрального оператора.

В статье K.Maleknejad, E.Saedipoor [19] предлагается прямой метод численного решения уравнения Фредгольма первого рода основанный на гибридных блочно-импульсных функциях и полиномах Лежандра. Эти гибридные базисные функции являются ортогональными и имеет компактный носитель. Получена оценка погрешности и показана сходимость предложенного метода в L_2 .

В работе M.Bahmanpour, M.T.Kajani, M.Maleki [70] предложен многоуровневый итерационный метод с использованием полинома Müntz-Лежандра.

Подход Mohsen Didgar и других авторов [17] основан на использовании разложения неизвестной функций в ряд Тейлора v -ой степени в произвольной точке и интегрирования. При этом интегральные уравнение Фредгольма первого рода преобразуется в систему линейных дифференциальных уравнений размерности $(v + 1)$. Приведены результаты сравнительного анализа между различными вейвлетами методами.

3.1 О вейвлетах Лежандра

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\mathcal{K}[x, y] \equiv \int_0^1 K(x, s)y(s)ds = f(x), x \in [0, 1], \quad (3.1.1)$$

где ядро $K(x, s)$ - вещественная непрерывная, квадратично суммируемая и ограниченная функция в области $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$. Для решения интегрального уравнения (3.1.1) применим метод Галеркина-Бубнова с использованием вейвлетов Лежандра [8]

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} (2m+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k-1}{2}} L_m(2^k t - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq t < \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0, & \text{для других } t. \end{cases}, \quad (3.1.2)$$

где $k = 2, 3, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$; $\hat{n} = 2n - 1$; $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$.

Многочлены Лежандра $L_l(t)$ порядка l на интервале $[-1; 1]$ определяется из следующей рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, \\ L_1(t) &= t, \end{aligned}$$

$$L_{l+1}(t) = \frac{2l+1}{l+1} t L_l(t) - \frac{l}{l+1} L_{l-1}(t), \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.3)$$

Множество $\{L_l(t): l = 0, 1, 2, \dots\}$ полное ортогональное множество в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$. Кроме того, полиномы Лежандра ограничены, т.е. $|L_l(t)| \leq 1, -1 \leq t \leq 1, l = 0, 1, 2, \dots$.

В рамках (3.1.2) и (3.1.3) m, l означает степень многочлена Лежандра, а k определяет количество полуинтервалов, на которых определяются вейвлеты.

Если $k = 2, M = 2$, тогда $n = 1, 2; \hat{n} = 1, 3$ и $m = 0, 1$. Для $k = 2, M = 2$ получим следующие вейвлеты Лежандра

$$\psi_{10}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

$$\psi_{11}(t) = \begin{cases} \sqrt{6}(4t - 1), & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$$\psi_{20}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

$$\psi_{21}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{6}(4t - 3), & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Если $M = 3$ тогда еще надо доопределить

$$\psi_{12}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{2}}(3(4t-1)^2 - 1), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} . \quad (3.1.8)$$

$$\psi_{22}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{5}{2}}(3(4t-3)^2 - 1), & 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$$

Легко проверяется [14], что множество $\{\psi_{nm}(t)\}$ составляют ортонормированную систему в $L_2[0,1]$.

3.2 Применение вейвлетов Лежандра в качестве базисных функций в проекционном методе Галеркина и его модификациях

Ортонормированную систему (3.1.2) используем для наилучшего приближения решения уравнения (3.1.1) в гильбертовом пространстве, и проблема его нахождения формально сводится к решению системы линейных уравнений. Целью наилучшего приближения является разработка представлений функции $y(x)$ с различным уровнем разрешения.

Пусть $\{V_i\}$ последовательность вложенных подпространств таких, что $\{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset L_2(R)$.

Введенная в пункте 3.1 система $\{\psi_{n,m}(t)\}$ образует базис Рисса для пространства V_n [20].

В общем случае любую функцию $f \in L_2(R)$ можно аппроксимировать его ортогональной проекцией $\mathcal{P}_n f$ на пространстве V_n

$$\mathcal{P}_n f(t) = \sum_m (f, \psi_{nm}(t)) \psi_{nm}(t), \quad (3.2.1)$$

где $\mathcal{P}_n f$ называется приближением к f с разрешением 2^{-n} . Наилучшее приближение обеспечивает последовательность приближений $\mathcal{P}_n f$ повышенной точности до заданной функции f [20].

Решение интегрального уравнения (3.1.1) представим в виде

$$y(s) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \psi_{nm}(s). \quad (3.2.2)$$

Коэффициенты $\{C_{nm}\}$ неизвестны и подставляя (3.2.2) в (3.1.1) имеем

$$\int_0^1 K(x, s) \left(\sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \psi_{nm}(s) \right) ds = f(x). \quad (3.2.3)$$

В силу линейности (3.2.3) интегрируем функцию под суммой получим

$$\sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \int_0^1 K(x, s) \psi_{nm}(s) ds = f(x). \quad (3.2.4)$$

По методу Бубнова-Галеркина коэффициенты C_{nm} определяются из требования, чтобы левая часть уравнения (3.2.4) стала ортогональной к функциям ψ_{ij} .

Поэтому умножим (3.2.4) скалярно на $\psi_{ij}(x), i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, j = 0, 1, \dots, M - 1$ и получим

$$\sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \left[\int_0^1 \int_0^1 K(x, s) \psi_{nm}(s) \psi_{ij}(x) ds dx \right] = \int_0^1 f(x) \psi_{ij}(x) dx, \quad (3.2.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}; j = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Под квадратной скобкой имеем 4-х индексную матрицу A , которую разворачиваем в 2-х индексную. Матрицы $\|C_{ij}\|$ и $\|F_{ij}\|$ вейвлет базис $\psi_{ij}(x), i = 1, 2, \dots, 2^{k-1} = N, j = 0, 1, \dots, M - 1$ представим в виде векторов \vec{a}_l , b_l и вектор-функции $\vec{\phi}_l(x)$ длиной l используя следующее упорядочивание индексов $l = (i - 1)M + j + 1, i = 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M - 1$. Тогда размерность вектора и количество вейвлет базисных функций будет равна $L = N \cdot M$.

Итак, уравнение (3.2.5) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^L \alpha_j \left[\int_0^1 \int_0^1 K(x, s) \phi_j(s) \phi_i(x) ds dx \right] = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx, i = 1, 2, \dots, L \quad (3.2.6)$$

или в матричном виде

$$A\alpha = b, \quad (3.2.7)$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K(x, t) \phi_i(x) \phi_j(t) dt dx, \quad (3.2.8)$$

$$b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, L; \quad j = 1, 2, \dots, L.$$

и искомое решение уравнения (3.1.1) записывается в виде

$$y(x) \approx \sum_{i=1}^L \alpha_i \phi_i(x). \quad (3.2.9)$$

3.3 Получение априорных оценок и изучение сходимости метода

Предположим, что интегральный оператор $\mathcal{K}[x, y]$ компактен в гильбертовом пространстве V и запишем уравнение (3.1.1) в операторной форме

$$\mathcal{K}[x, y] = f. \quad (3.3.1)$$

Из (3.2.4) получим невязку

$$r_n(x) = \sum_{l=1}^n \sum_{m=0}^{M-1} C_{lm} \int_0^1 K(x, s) \psi_{lm}(s) ds - f(x), \quad (3.3.2)$$

где $n = 2^{k-1}, \dots$ или с использованием (3.2.2), (3.3.1) можно записать в виде

$$r_n(x) = \mathcal{K}[x, y_n] - f(x). \quad (3.3.3)$$

Необходимо требовать, чтобы невязка $r_n(x)$ стремилась к нулю и разложение функции $y_n(x)$ было хорошим решением уравнения (3.1.1). Мы хотим показать, что базис из вейвлетов Лежандра обладает свойствами наилучшего приближения [71], то из методов Галеркина для решения (3.1.1) следует, что $y_n(x) \rightarrow y(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $V = L_2[0,1]$ и через $\langle \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение на V . Тогда метод Галеркина (3.2.5) используя (3.3.2), (3.3.3) можно записать в виде

$$\langle r_n(x), \psi_{ij}(x) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.3.4)$$

Из (3.3.3) и (3.3.4) имеем линейную систему вида (3.2.7).

Рассмотрим проекционный оператор (3.2.2), который отображает V на V_n для каждого $y \in V$ и определим $\mathcal{P}_n y$, как решение следующей задачи

$$\|y - \mathcal{P}_n y\| = \max_{g \in V_n} \|y - g\|. \quad (3.3.5)$$

Построенный вейвлет базис (3.1.2) является ортонормированным

$$\langle \psi_{nk}, \psi_{ni} \rangle = \delta_k^i, \quad k, i = 1, 2, \dots, M-1.$$

Поэтому проекционный оператор \mathcal{P}_n можно записать так [16]

$$\mathcal{P}_n y(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \langle \psi_{nm}, y \rangle \psi_{nm}(x). \quad (3.3.6)$$

Для проекционного оператора \mathcal{P}_n справедлива следующая лемма [8, 22].

Лемма 1. Если $y, g \in V$ и \mathcal{P}_n проекционный оператор определенный в виде (3.3.6), тогда выполняются следующие соотношения

$$(\mathcal{P}_n y, g) = (y, \mathcal{P}_n g), \quad (3.3.7)$$

$$\mathcal{P}_n^2 y = \mathcal{P}_n y, \quad (3.3.8)$$

$$(y - \mathcal{P}_n y, \mathcal{P}_n g) = 0, \quad (3.3.9)$$

$$\|y\|^2 = \|\mathcal{P}_n y\|^2 + \|y - \mathcal{P}_n y\|^2, \quad (3.3.10)$$

$$\|\mathcal{P}_n\| = 1, \quad (3.3.11)$$

$$\|y - g\|^2 = \|y - \mathcal{P}_n y\|^2 + \|\mathcal{P}_n y - g\|^2. \quad (3.3.12)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть (3.3.7) используя формулу проекционного оператора (3.3.6)

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_n y, g) &= \int_0^1 \left\{ \sum_{l=1}^n \sum_{m=0}^{M-1} \left(\int_0^1 y(t) \cdot \psi_{lm}(t) dt \right) \psi_{lm}(x) \right\} g(x) dx = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=0}^{M-1} \left(\int_0^1 y(t) \cdot \psi_{lm}(t) dt \right) \int_0^1 g(x) \psi_{lm}(x) dx = \quad (3.3.13) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=0}^{M-1} \int_0^1 y(t) \cdot (g, \psi_{lm}) \psi_{lm}(t) dt = (y, \mathcal{P}_n g). \end{aligned}$$

Таким образом, доказано (3.3.7).

Для доказательства (3.3.8) рассмотрим

$$\mathcal{P}_n^2 y(x) = \sum_{l=1}^n \sum_{m=0}^{M-1} (\mathcal{P}_n y(s), \psi_{lm}(s)) \cdot \psi_{lm}(x). \quad (3.3.14)$$

Преобразуем скалярное произведение, входящее в (3.3.14) используя ортонормированность системы функций $\{\psi_{ij}(x)\}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_n y(s), \psi_{lm}(s)) &= \int_0^1 \mathcal{P}_n y(s) \psi_{lm}(s) ds = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{M-1} (y, \psi_{ij}) \psi_{ij}(s) \right) \psi_{lm}(s) ds = \quad (3.3.15) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{M-1} (y, \psi_{ij}) \cdot \int_0^1 \psi_{ij}(s) \psi_{lm}(s) ds = (y, \psi_{lm}). \end{aligned}$$

Подставляя (3.3.15) в (3.3.14) получим

$$\mathcal{P}_n^2 y(x) = \sum_{l=1}^n \sum_{m=0}^{M-1} (y, \psi_{lm}) \psi_{lm} = \mathcal{P}_n y(x), \quad (3.3.16)$$

что и доказывает (3.3.8).

Используя (3.3.8) доказывается формула (3.3.9)

$$\begin{aligned} (y - \mathcal{P}_n y, \mathcal{P}_n g) &= (y, \mathcal{P}_n g) - (\mathcal{P}_n y, \mathcal{P}_n g) = \\ &= (y, \mathcal{P}_n g) - (y, \mathcal{P}_n^2 g) = (y, \mathcal{P}_n g) - (y, \mathcal{P}_n g) = 0 \quad (3.3.17) \end{aligned}$$

Формулы (3.3.10), (3.3.11) и (3.3.12) доказываются с помощью (3.3.9).

Лемма доказана.

Из (3.3.12) имеем

$$\|y - y_n\|^2 = \|y - \mathcal{P}_n y\|^2 + \|\mathcal{P}_n y - y_n\|^2. \quad (3.3.18)$$

Пусть ε произвольное малое положительное число, т.е. $\varepsilon > 0$. Тогда по свойству наилучшего приближения и так как $\bigcup_{n=1}^N V_n$ плотно в $L_2(R)$ существует функция $y_n \in V_n$ такой что $\|y - y_n\| < \varepsilon$. Тогда, если $m \geq n$ имеем

$$\|y - \mathcal{P}_m y\| \leq \|y - y_m\| < \varepsilon. \quad (3.3.19)$$

Следовательно, для любой функции $y \in L_2(R)$, разлагающейся в виде (3.3.6) имеем $\mathcal{P}_n y \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь невязку $r_l(x)$ на l -ом полуинтервале

$$r_l(x) = \sum_{m=0}^{M-1} C_{lm} \int_{\frac{l-1}{2^{k-1}}}^{\frac{l}{2^{k-1}}} K(x, s) \psi_{lm}(s) ds - f(x), \quad (3.3.20)$$

$$x \in \left[\frac{l-1}{2^{k-1}}; \frac{l}{2^{k-1}} \right], l = 1, 2, \dots, 2^{k-1}.$$

Ядро и правая часть интегрального уравнения (3.1.1) предполагаем ограниченными

$$0 < K_0 \leq |K(x, s)| \leq K_1, 0 \leq F_0 \leq |f(x)| \leq F_1 \quad (3.3.21)$$

для $(x, s) \in G$, $l = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$; $m = 0, 1, \dots, M-1$.

Лемма 2. Для $K(x, s), f(x)$ удовлетворяющие условиям (3.3.21) справедлива оценка

$$\|r_l(x)\| \leq \left(\frac{2M-1}{2^{2(k-1)}} \right) \frac{K_1 F_1}{K_0} + (2M-1)^{\frac{1}{2}} M F_0, \text{ для } x \in \left[\frac{l-1}{2^{k-1}}, \frac{l}{2^{k-1}} \right]. \quad (3.3.22)$$

Доказательство. Функцию правой части в (3.3.20) представим в виде разложения по базисным функциям на l -ом полуинтервале

$$f(x) \approx \sum_{m=0}^{M-1} (f, \psi_{lm}) \psi_{lm}(x). \quad (3.3.23)$$

Из (3.3.20) с учетом (3.3.21) и (3.3.23) получим неравенство

$$|r_l(x)| \leq \sum_{m=0}^{M-1} \left| C_{lm} \int_{\frac{l-1}{2^{k-1}}}^{\frac{l}{2^{k-1}}} K(x, s) \psi_{lm}(s) ds - \left(\int_{\frac{l-1}{2^{k-1}}}^{\frac{l}{2^{k-1}}} f(s) \psi_{lm}(s) ds \right) \psi_{lm}(x) \right|,$$

Функцию $K(x, s)$ в первом слагаемом оцениваем сверху, а во втором слагаемом f и $\psi_{lm}(x)$ снизу и получим

$$|r_l(x)| \leq \sum_{m=0}^{M-1} \left| C_{lm} K_1 - F_0 2^{\frac{k-1}{2}} \right| (2M-1)^{1/2} 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Таким образом, получается следующее неравенство

$$|r_l(x)| \leq \left(\frac{2M-1}{2^{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{M-1} \left| C_{lm} K_1 - 2^{\frac{k-1}{2}} F_0 \right|. \quad (3.3.24)$$

Из этого следует

$$|r_l(x)| \leq \left(\frac{2M-1}{2^{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}} M \left(\|C\| K_1 + 2^{\frac{k-1}{2}} F_0 \right), \quad (3.3.25)$$

где C является решением системы линейных уравнений (3.2.5), т.е.

$$AC = F,$$

где C - матрица с элементами C_{ij} , F - матрица с элементами (f, ψ_{ij}) , где $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}; j = 0, 1, \dots, M-1$.

Оценим норму четырех индексной матрицы A . Согласно определению нормы матрицы и виду матрицы из (3.2.5) имеем

$$\|A\| = \max_{\substack{1 \leq l \leq 2^{k-1}, \\ 0 \leq m \leq M-1}} \left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^1 \int_0^1 K(x, s) \psi_{ij}(s) \psi_{lm}(x) ds dx \right).$$

далее суммируя под знаком интегралов имеем

$$\|A\| = \max_{\substack{1 \leq l \leq 2^{k-1}, \\ 0 \leq m \leq M-1}} \left(\int_0^1 \psi_{lm}(x) dx \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{M-1} \psi_{ij}(s) \right) K(x, s) ds \right). \quad (3.3.26)$$

Получим оценку нормы матрицы A сверху

$$\begin{aligned} \|A\| &= K_1 \max_{\substack{1 \leq l \leq 2^{k-1}, \\ 0 \leq m \leq M-1}} \left\{ \int_0^1 \psi_{lm}(x) dx \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{M-1} (2j+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k-1}{2}} L_j(2^k s - \hat{n}) \right] ds \right\} \leq \\ &\leq 2^{\frac{k-1}{2}} K_1 (2M-1)^{\frac{1}{2}} \cdot M \cdot 2^{k-1} \cdot \max_{\substack{1 \leq l \leq 2^{k-1}, \\ 0 \leq m \leq M-1}} \left| \int_0^1 \psi_{lm}(x) dx \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2^{\frac{3(k-1)}{2}} \cdot K_1 (2M-1)^{\frac{1}{2}} \cdot M \cdot (2M-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} = \\ = 2^{2(k-1)} \cdot K_1 \cdot (2M-1) \cdot M.$$

Таким образом,

$$\|A\| \leq 2^{2(k-1)} \cdot K_1 \cdot (2M-1) \cdot M. \quad (3.3.27)$$

Оценим норму матрицы (3.3.26) снизу

$$\|A\| \geq K_0 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \cdot M \cdot 2^{k-1} \max_{\substack{1 \leq l \leq 2^{k-1} \\ 0 \leq m \leq M-1}} \left| \int_0^1 \psi_{lm}(x) dx \right| \geq 2^{\frac{3(k-1)}{2}} \cdot K_0 \cdot M \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} = \\ = 2^{2(k-1)} \cdot K_0 \cdot M.$$

Из этого соотношения с учетом неравенства (3.3.27) имеем

$$2^{2(k-1)} K_0 M \leq \|A\| \leq 2^{2(k-1)} K_1 (2M-1) M. \quad (3.3.28)$$

Матрица A является симметричной поэтому [71]

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A\|}. \quad (3.3.29)$$

Из (3.3.28), (3.3.29) имеем

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{2^{2(k-1)} K_0 M}. \quad (3.3.30)$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (3.2.5) имеем оценку

$$\|C\| \leq \|A^{-1}\| \|F\| \leq \|A^{-1}\| \|f\| \|\psi\| = \frac{F_1 (2M-1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k-1}{2}}}{2^{2(k-1)} K_0 M}.$$

Итак

$$\|C\| \leq \frac{(2M-1)^{\frac{1}{2}} F_1}{2^{\frac{3}{2}(k-1)} K_0 M} \quad (3.3.31)$$

Подставляем (3.3.31) в (3.3.25) и имеем

$$\|r_l(x)\| \leq \left(\frac{2M-1}{2^{k-1}}\right)^{1/2} M \left(\frac{(2M-1)^{1/2} F_1 K_1}{2^{3/2(k-1)} K_0 M} + 2^{\frac{k-1}{2}} F_0 \right).$$

Отсюда получается оценка (3.3.22).

Лемма доказана.

Согласно методу Бубнова-Галеркина коэффициенты C_{lm} определяются из системы линейных алгебраических уравнений (3.2.5) с симметричной матрицей A . Матрица этой системы и правая часть вычисляются неточно, т.е. интегралы вычисляются с погрешностью. Тогда вместо предъявленной к решению системы (3.2.7) в действительности будет решена некоторая система

$$A_1 \alpha^* = b_1, A_1 = A + \delta A, b_1 = b + \delta b. \quad (3.3.32)$$

Пусть известны оценки $\|\delta A\|$ и $\|\delta b\|$. Оценим погрешность решения системы (3.2.7).

Обозначим решения (3.2.7) и (3.3.32) через α и α^* , $\delta \alpha = \alpha^* - \alpha$. Подставив выражения A_1 , b_1 и α^* в (3.3.32), будем иметь

$$(A + \delta A)(\alpha + \delta \alpha) = b + \delta b.$$

Вычитая из этого равенства (3.2.7), получим

$$A(\delta a) + \delta A \cdot \alpha + \delta A(\delta \alpha) = \delta b$$

откуда

$$A(\delta a) = \delta b - \delta A \cdot \alpha - \delta A(\delta \alpha),$$

и

$$\delta \alpha = A^{-1}(\delta b - \delta A \cdot \alpha - \delta A(\delta \alpha)). \quad (3.3.33)$$

Для оценки погрешности приближенного решения справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть матрица A имеет обратную и пусть выполняется условие

$$\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1. \quad (3.3.34)$$

Тогда матрица $A_1 = A + \delta A$ имеет обратную и справедлива следующая оценка погрешности

$$\|\delta\alpha\| \leq \frac{\|A\|^{-1}(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|\alpha\|)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}. \quad (3.3.35)$$

При доказательстве будет использована следующая лемма [72].

Лемма 3. Пусть B – квадратная матрица, удовлетворяющая условию $\|B\| < 1$ и E – единичная матрица. Тогда существует матрица $(E + B)^{-1}$, причем

$$\|(E + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}. \quad (3.3.36)$$

Доказательство. Для любого вектора $x \in V$ имеем

$$\begin{aligned} \|(E + B)x\| &= \|x + Bx\| \geq \|x\| - \|Bx\| \geq \|x\| - \|B\|\|x\| = \\ &= (1 - \|B\|)\|x\| = \delta\|x\|, \end{aligned}$$

где $\delta = 1 - \|B\| > 0$.

В неравенстве

$$\|(E + B)x\| \geq \delta\|x\|. \quad (3.3.37)$$

обозначим $(E + B)x = y$, $x = (E + C)^{-1}y$ и перепишем (3.3.37) в виде

$$\|y\| \geq \delta\|(E + B)^{-1}y\|.$$

Отсюда получим

$$\|(E + B)^{-1}y\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\| = \frac{1}{1 - \|B\|}\|y\|.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Докажем, что существует обратная матрица $(A + \delta A)^{-1}$.

$$A_1 = A + \delta A = A(E + A^{-1}\delta A) = A(E + B),$$

где $B = A^{-1}\delta A$. По условию (3.3.35) имеем

$$\|B\| = \|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$$

поэтому согласно лемме 3 существует $(E + B)^{-1}$, а следовательно, и A_1^{-1} .

Теперь докажем неравенство (3.3.35). Из соотношения (3.3.33) получим неравенство

$$\|\delta\alpha\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\| + \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\alpha\| + \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\delta\alpha\|.$$

По условию (3.3.34) теоремы имеем $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$. Собирая слагаемые содержащие $\|\delta\alpha\|$ в левую часть получим оценку

$$\|\delta\alpha\| \leq \frac{\|A^{-1}\| (\|\delta b\| + \|\delta A\| \|\alpha\|)}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|}$$

Теорема доказана.

3.4 Численный анализ

Для иллюстрации возможностей предложенного численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, рассмотрим следующий пример из подпункта 2.2

$$\int_0^1 \left(xs + \frac{x+s}{3} + \frac{1}{5} \right) y(s) ds = 3x + \frac{19}{15}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

с симметричным ядром и точным решением

$$y(x) = 1 + 6x^2.$$

При вычислении принималось $k = 2$ и $M = 2$. В таком случае количество базисных функций и размерность вектора неизвестных α будет $L = 4$. Для вычисления двойных интегралов вида

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, s) \phi_j(s) \phi_i(x) ds dx \approx \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_2-1} K(x_k, s_l) \varphi_j(s_l) \varphi_i(x_k) h_1 h_2,$$

где $h_1 = \frac{1}{N_1}$, $h_2 = \frac{1}{N_2}$.

Были использованы кубатурные формулы левых прямоугольников. Количество узлов интегрирования выбиралось по правилу Рунге и наиболее оптимальными оказалось $n = 51$. Результаты численных расчетов в 11 узлах приведены в таблице 3.1.

Численный алгоритм реализован с помощью программы Приложение А. На рисунках 7 А, В графически изображены приближенное и точное решение, полученные в работе [9].

Таблица 3.1 – Численные расчеты

i	x_i	$\tilde{y}(x_i)$	$y_T(x_i)$	$ \tilde{y}(x_i) - y_T(x_i) $
1	0	0.98730	1	0.012700
2	0.1	1.40862	1.06	0.348622
3	0.2	1.82994	1.24	0.589944
4	0.3	2.25127	1.54	0.711266
5	0.4	2.67259	1.96	0.712588
6	0.5	2.50174	2.5	0.001739
7	0.6	3.27233	3.16	0.112327
8	0.7	4.04291	3.94000	0.102915
9	0.8	4.8135	4.84000	0.026496
10	0.9	5.58409	5.86000	0.275908
11	1	6.35468	7	0.645320

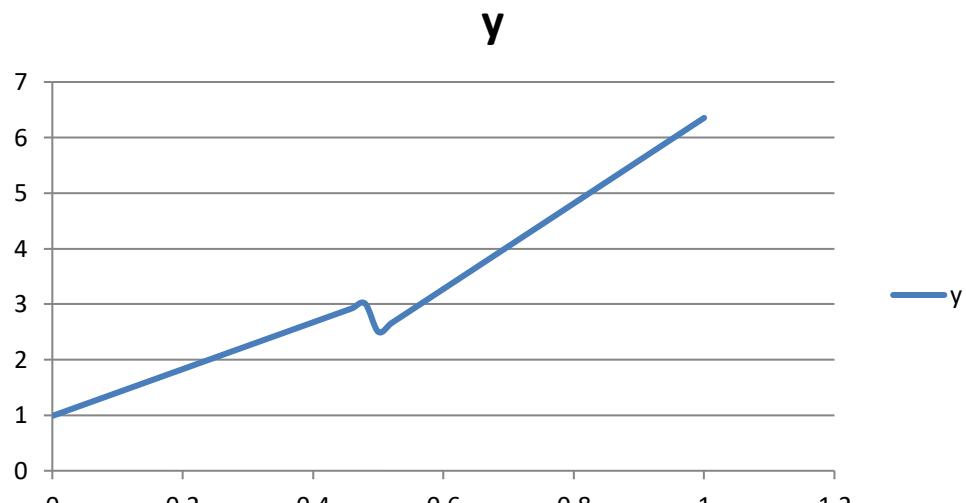


Рисунок 7А – Приближенное решение

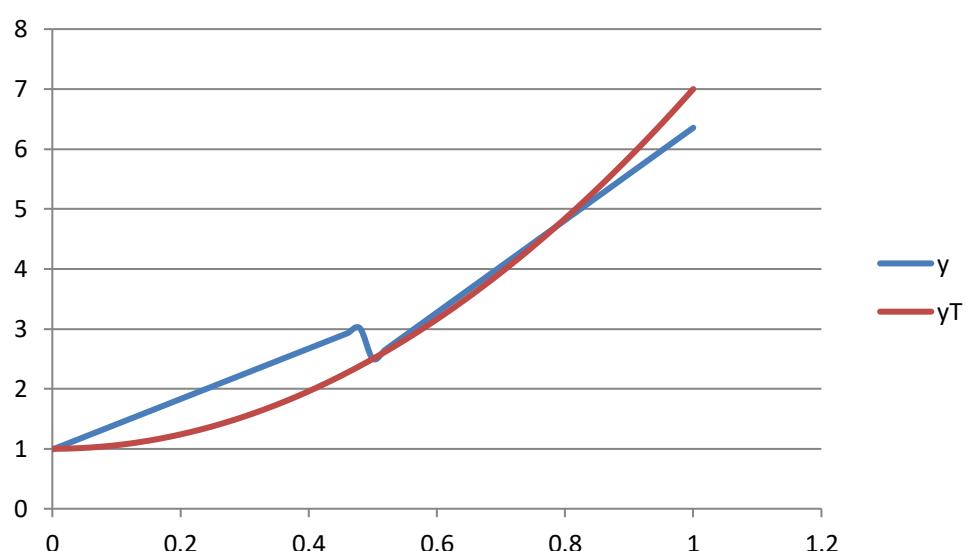


Рисунок 7В – Приближенное и точное решение

Данный пример численно решался во 2 главе многими методами: методом тихоновской регуляризации [1, 73], методом Г.Н. Положего [4] и конструктивным методом с интегральным оператором «сопровождения» с ядром Пуассона предложенный в работе [5].

Использование вейвлетов для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода методом Галеркина, показало достаточно хорошую эффективность. Кроме того, численные расчеты показывают использование в качестве базисных функций вейвлетов Лежандра оказывает положительный эффект для численного или аналитического вычисления интегралов в вычислительной схеме [10].

4 СОЗДАНИЕ МОДУЛЯ ГЕОИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОХИМИИ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИМИ АЛГОРИТМАМИ

В настоящее время в связи с бурным развитием компьютерной технологии в геологии интенсивно развиваются методы и подходы научной визуализации, основанные на дополнительном анализе данных. Общая концепция заключается в том, что на входе задается основное поле данных на дневной поверхности и дополнительные условия. Далее, для их анализа и обработки применяются методы математической геофизики, в результате которого получается новая информация для глубинных изысканий. Затем в информационной системе применяются средства визуализации к полученной новой информации и к основному полю данных. Таким образом, информационная система основана на синтезе методов визуального представления и методов математической геофизики, вычислительной математики из разных разделов знаний. В настоящей главе представлено описание программного модуля геоинформационной системы, основанного на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений. Функционирование программного модуля основано на применении теории обратных задач математической геофизики с использованием геологических данных на поверхности земли, геофизических измерений и геохимических анализов в качестве входных данных. Программный модуль для обратной задачи о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс используется для реальных данных конкретного месторождения полезных ископаемых.

К настоящему времени сформировался ряд научных подходов к изучению структуры недр Земли. Среди них важное прикладное значение имеют методы математической геофизики [1]. Данный подход успешно используется для развития теории и практики геофизических исследований геологической среды. Многие задачи математической геофизики приводят к решению обратных и некорректных задач, применение которых, в основном, связано с науками о Земле: обратной задачи магнитотеллурического зондирования, каротажа, продолжения полей геохимических исследований, сейсмики, теории потенциала и других.

В программном модуле рассмотрены обратные задачи о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс и магнитотеллурического зондирования. Эти задачи описываются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода.

Математическая модель геохимической задачи в виде обратной задачи о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс исследована с использованием математического аппарата интегральных уравнений. Задача заключается в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода для большого количества различных правых частей, при этом ядро интегрального уравнения остается одним и тем же [54]. Решение интегрального уравнения

Фредгольма первого рода связано с задачей выявления аномалий при исследовании пространственного распределения химических элементов на редкометальных месторождениях. Известно, что некорректность интегрального уравнения Фредгольма первого рода заключается в неустойчивости решения. Так же она имеет систему линейных алгебраических уравнений с плохообусловленной матрицей.

Следует отметить, что стремительное развитие методов повышения геологической изученности невозможno без развития геоинформационных технологий и микроэлектроники. Исследования в этой области используют современные методы компьютерной обработки больших объемов данных наблюдения Земли, а также методы вычислительной математики [19]. В работе [74] описываются новые возможности математического моделирования при решении самых сложных научно-технических задач и рассматривается построение программного обеспечения вычислительного эксперимента. В настоящее время практически отсутствуют препятствия со стороны систем полевых наблюдений, включающие и источники физических полей. Поэтому актуальным является развитие методов численного решения обратных задач геофизики и разработка сервисного программного обеспечения для преобразования цифровых данных в геоинформационные системы для наглядной интерпретации результатов геологических изысканий. Применение геоинформационных систем помогает интегрировать и упорядочить информацию о ресурсном потенциале полезных ископаемых и представить их в удобном для понимания, анализа и управления картографическом виде, начиная с подробного обследования осваиваемых месторождений и проведения на них изысканий.

Кроме того, в последние десятилетия активно развивается новое направление исследований, специализирующееся на применении искусственных нейронных сетей для повышения степени геологической и геофизической изученности. Данное направление позволяет получать ранее недоступные массивы высокодетальных и точных данных о подземном строении Земли. Например, в работе [75] нейросети используются для решения обратных задач электроразведки при проведении магнитотеллурического зондирования. Известно также успешное применение алгоритмов искусственного интеллекта для анализа проб, моделирования и интерпретации геолого-геофизической информации.

4.1 Описание программного модуля ГИС

Разработан программный модуль геоинформационной системы, основанный на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений. Функционирование программного модуля основано на применении теории обратных задач математической геофизики с использованием геологических данных на поверхности земли, геофизических измерений и геохимических анализов в качестве входных данных. Данный

модуль геоинформационной системы, комплексной прогнозно-минерагенической модели, описан в работах [11, 12].

Разработанный программный модуль основан на комплексной прогнозно-минерагенической модели, состоящей из геохимической и геофизической части и цифрового моделирования методами обратных задач геохимии и геофизики (Рисунок 8), которая направлена на региональное геологическое изучение недр, а именно глубинные части земной коры [76].

Результатом геохимического и геофизического исследований являются комплекс исходных данных в виде скалярных и векторных полей. Используя математические модели, численные методы их решения и полученные исходные данные, производится цифровое моделирование методами обратных задач. Разработанный алгоритм является основой сервисного программного обеспечения с конвертацией цифровых данных в геоинформационную систему для наглядной интерпретации результатов геологических изысканий.

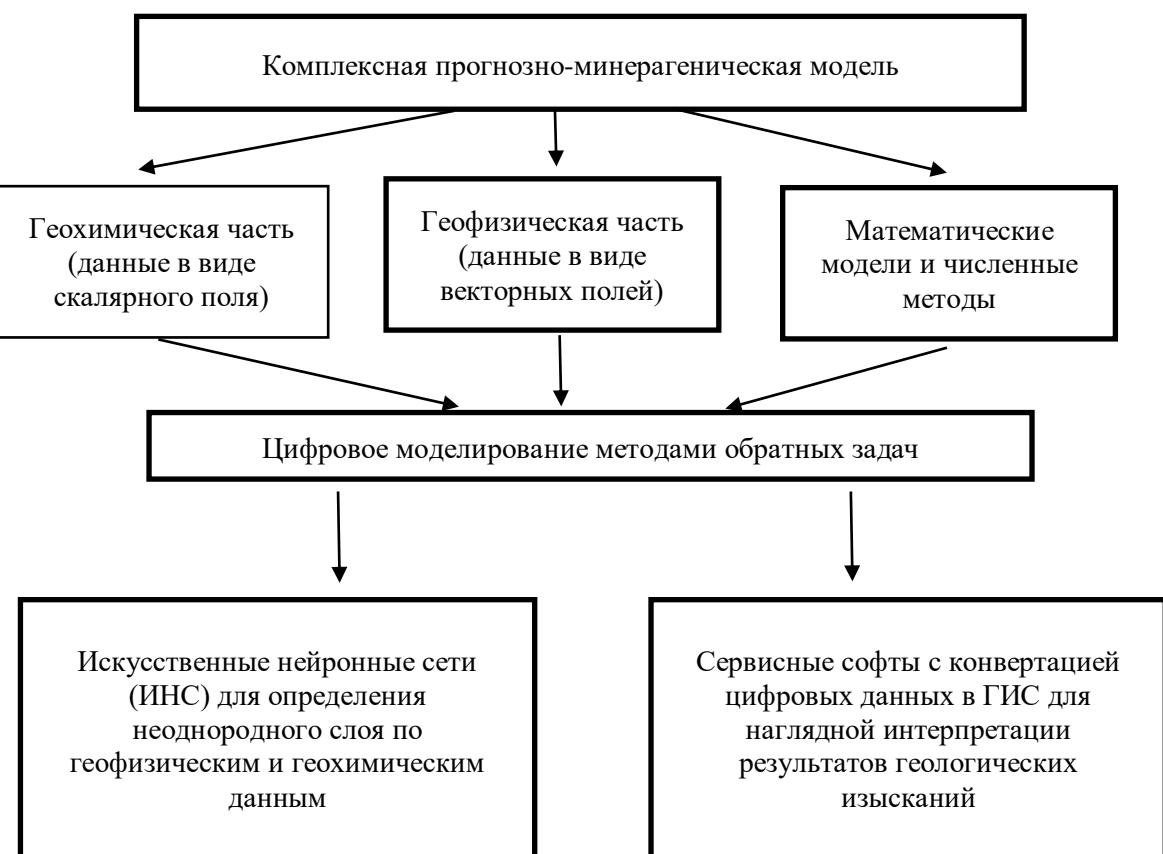


Рисунок 8 – Комплексная прогнозно-минерагеническая модель

В программном модуле геоинформационной системы QGIS, реализованы алгоритмы решения обратных задач для восстановления поля распределения химических элементов на заданной глубине. Модуль также содержит ряд вспомогательных решений, позволяющих расширить функциональность данной информационной системы.

Сравнительный анализ расчетных данных с эмпирическими данными, проведенный для верификации модели, показывает, что модель позволяет

достаточно точно восстановить поле распределения на небольшой глубине, с погрешностью менее 2%. При более низкой глубине отклонение расчетных данных от эталонных существенно возрастает, однако в силу некорректности обратных задач, полученные результаты также можно считать приемлемыми.



Рисунок 9 – Запуск программы QGIS версии 3.18.3-Zurich

Разработан программный модуль для системы QGIS версии 3.18.3-Zurich (Рисунок 9), который предоставляет пользователям QGIS необходимый набор методов для восстановления полей распределения химических элементов на заданной глубине на основе математического моделирования, и имеет следующие функциональные возможности:

1. Импорт входных данных измерений из файлов формата CSV в базу данных;
 2. Проведение прогнозных расчетов на основе входных данных измерений и алгоритма решения обратной задачи;
 3. Визуализация исходных данных и данных, полученных в результате решения обратной задачи.

Структура программного расширения состоит из двух частей. Первая часть написана на языке Python и представляет собой программные инструкции для взаимодействия пользователя с интерфейсом информационной системы. Вторая часть – вычислительное ядро – содержит реализацию алгоритмов решения обратной задачи.

На рисунке 10 показано диалоговое окно, в котором можно задать следующие параметры:

- 1) Количество узлов расчетной сетки;
 - 2) Исходные данные (сессия, химический элемент);

3) Параметры расчета (глубина, параметр регуляризации, максимальное количество итераций, точность вычислений, значение итерационного параметра).

Результаты вычислительных расчетов записываются в базу данных.

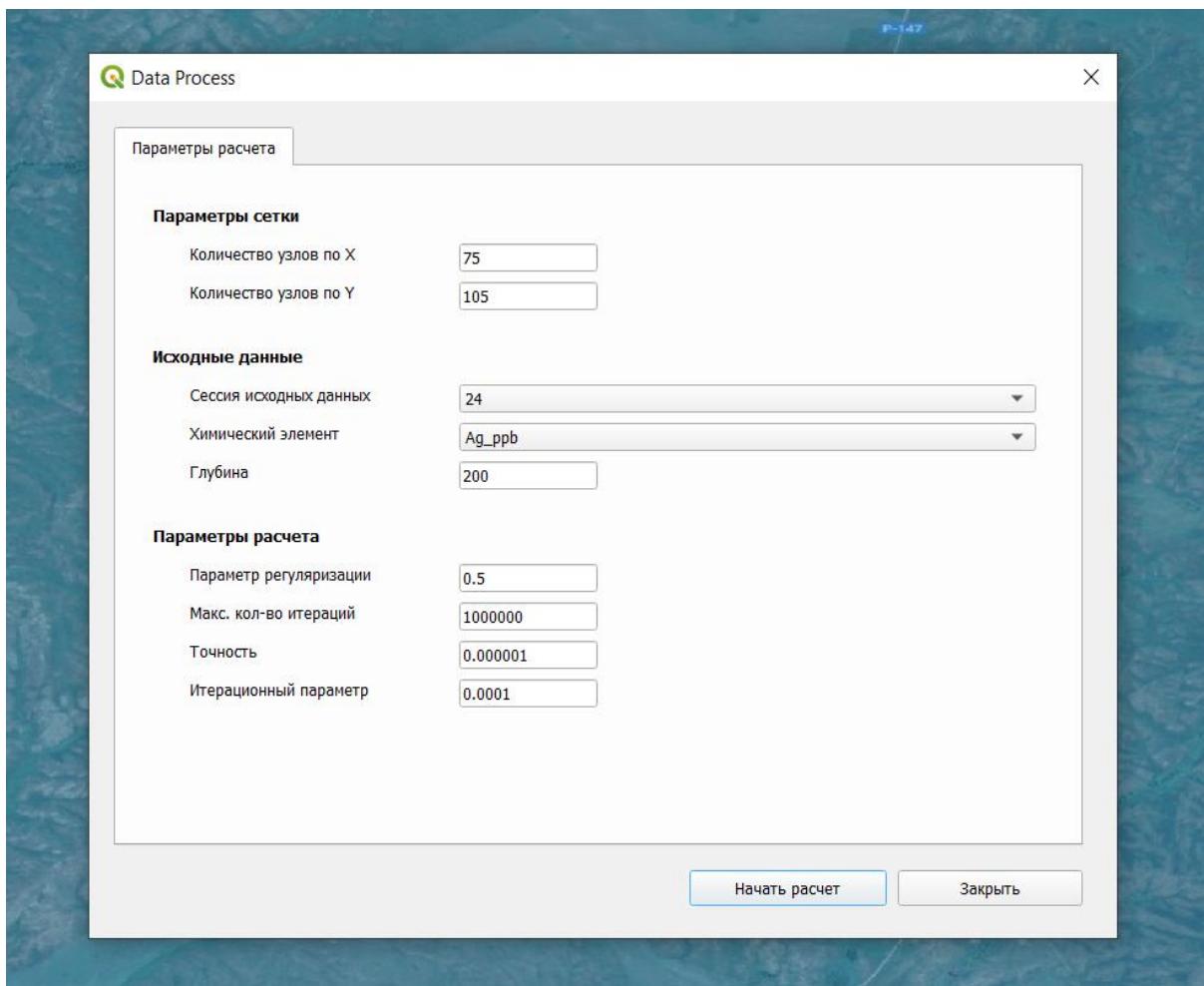


Рисунок 10—Диалоговое окно задания параметров расчета

Следующим шагом является визуализация данных. На основе полученной информации создается новый векторный слой с изолиниями значений. В качестве подложки используются топографические карты, доступ к которым осуществляется посредством ArcGIS REST Services. Полученный фрагмент карты с результатом визуализации можно экспортовать в различные графические форматы.

На рисунках 11 – 13 показаны примеры визуализации исходных данных для трех химических элементов.

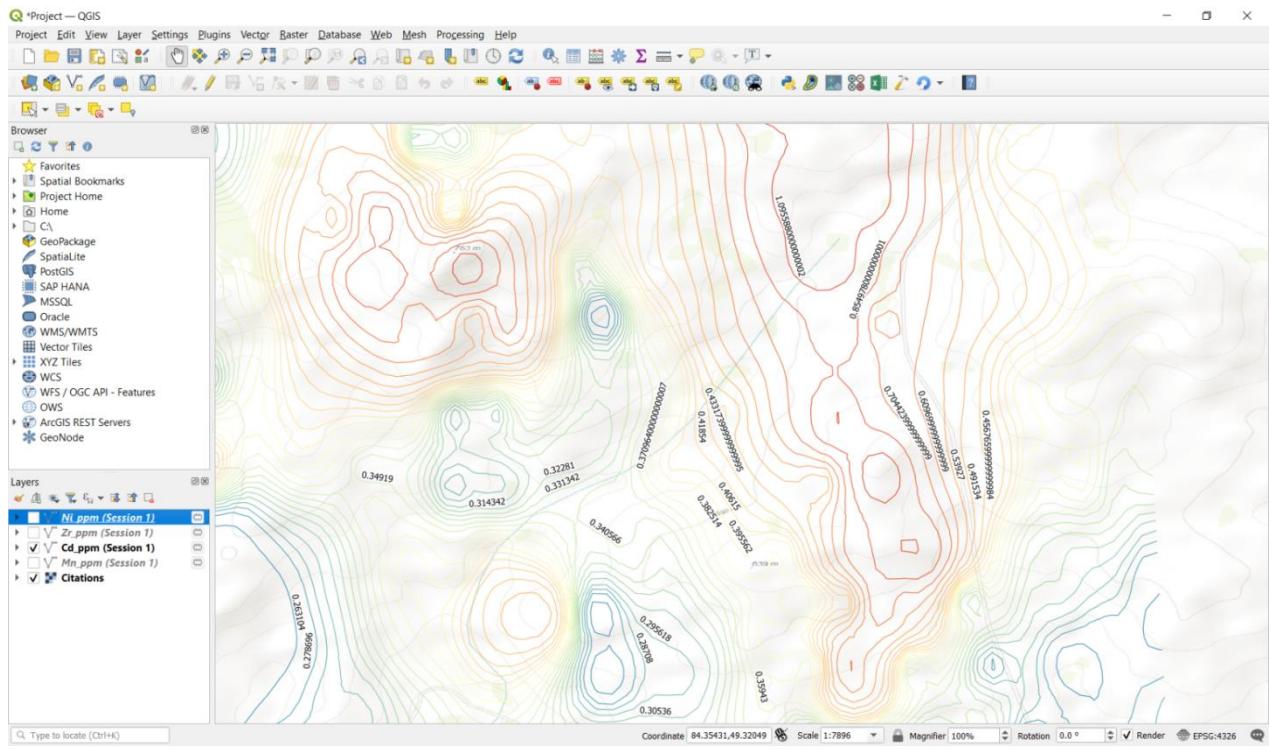


Рисунок 11 – Визуализация исходных данных для кадмия

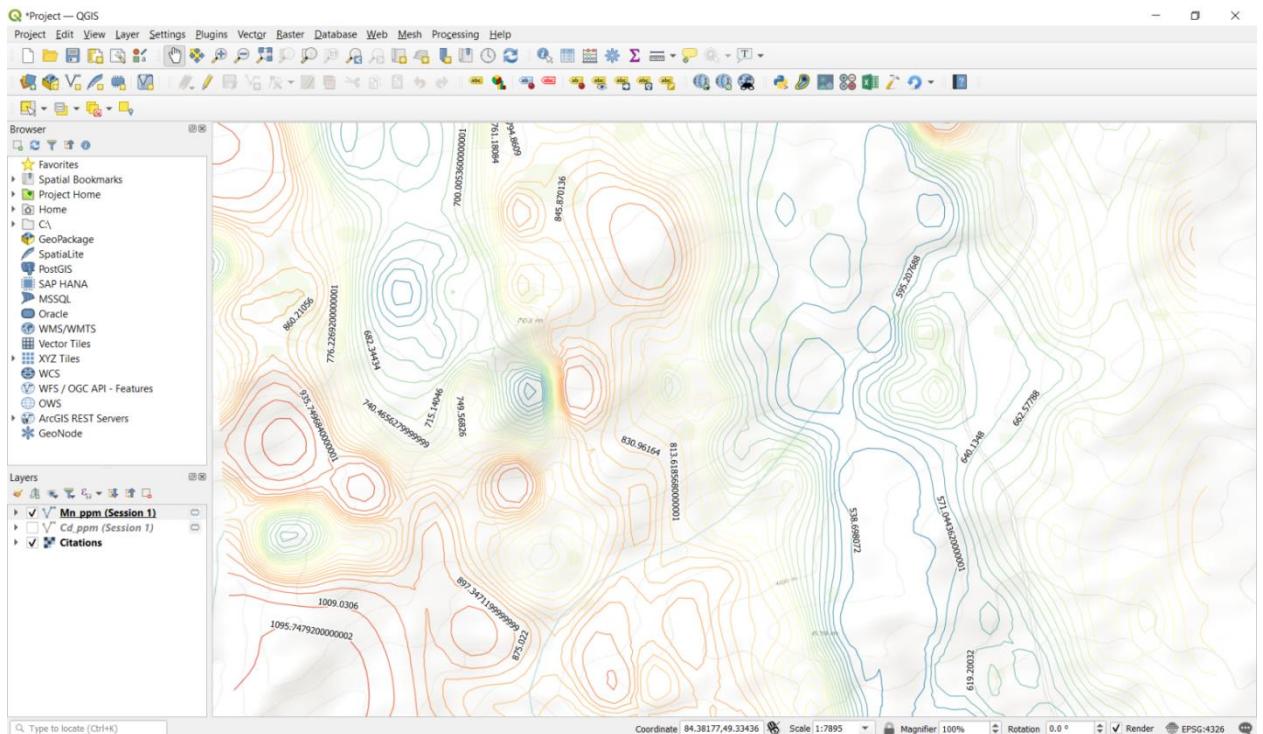


Рисунок 12 – Визуализация исходных данных для марганца

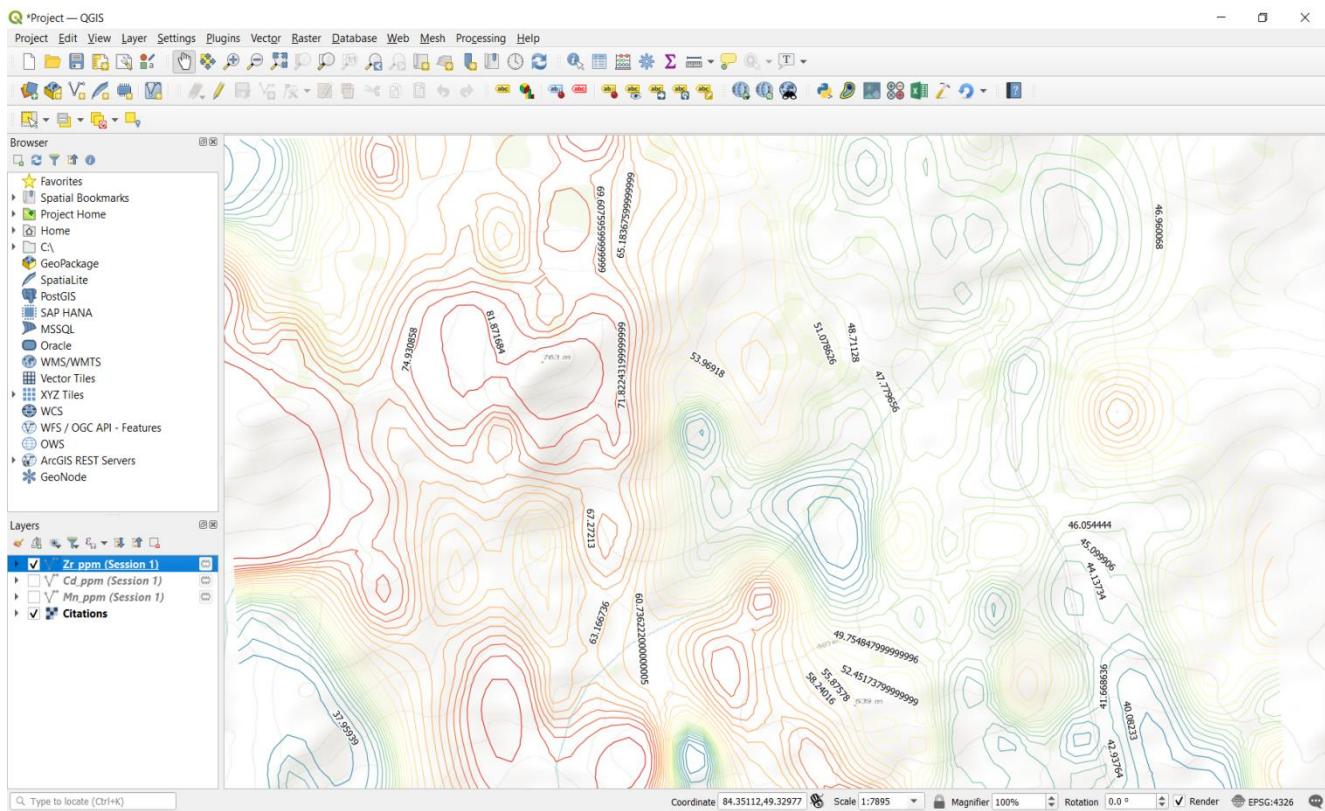


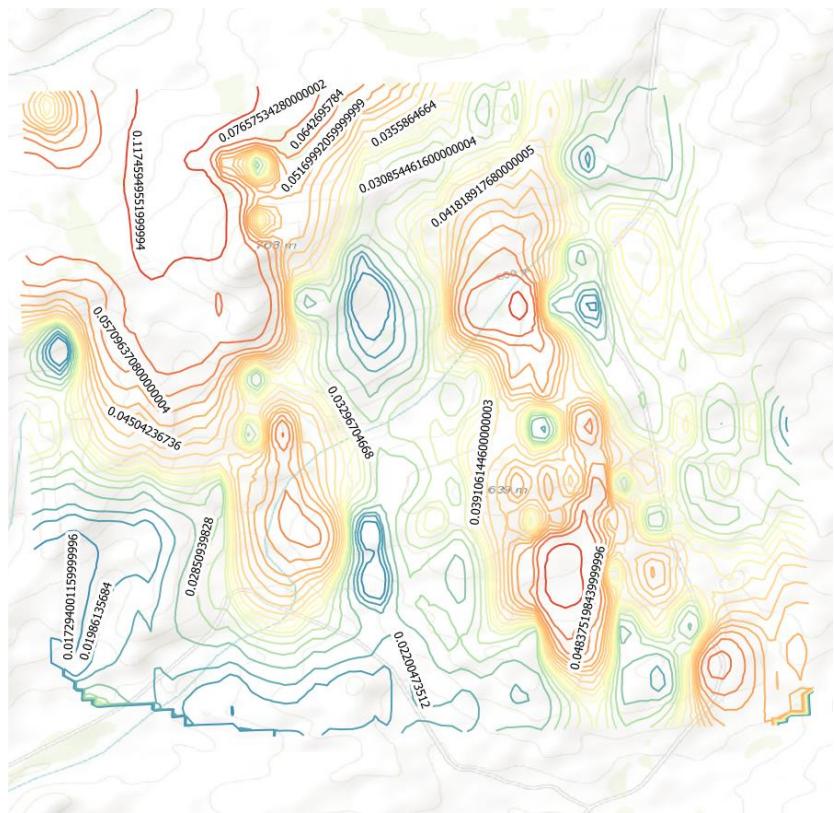
Рисунок 13 – Визуализация исходных данных для циркония

4.2 Апробация разработанного программного модуля для определения аномалий золота на глубине

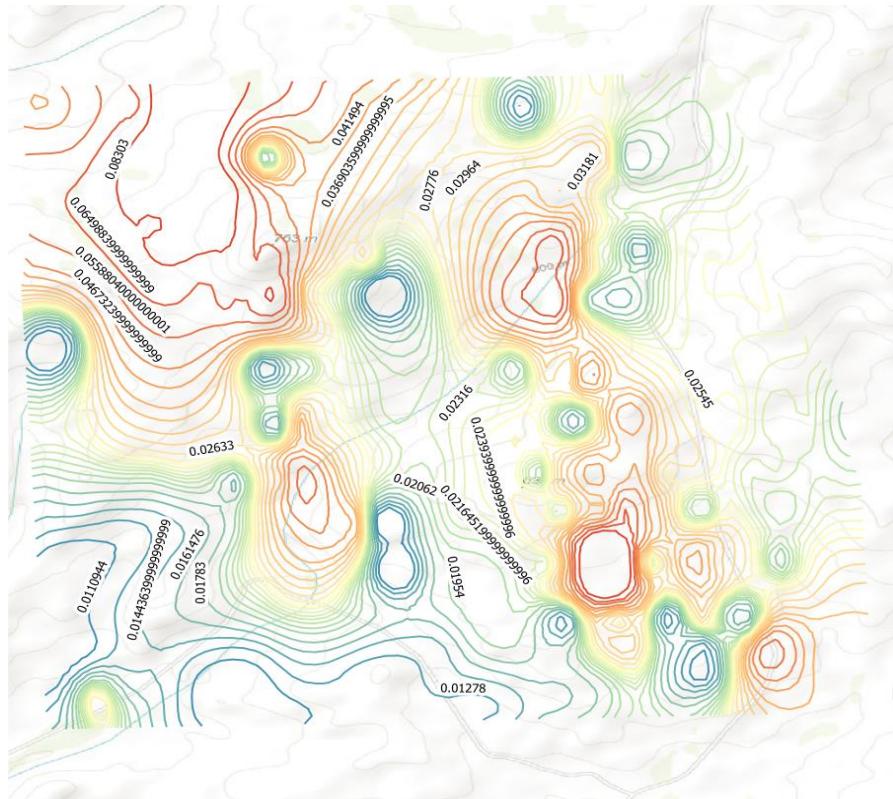
Для апробации разработанного программного модуля проведен ряд методических расчетов с использованием данных по Ново-Хайрузовскому участку южного Алтая [77]. Цель вычислительных экспериментов состоит в восстановлении поля распределения z_c заданного химического элемента на глубине h на основе известных эмпирических данных на дневной поверхности, а также сравнении полученных результатов с эмпирическими данными z_e на глубине h , полученных в ходе полевых и лабораторных исследований. Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов, проведенных для химического элемента - золота.

Ниже на рисунках 14, 15 показана концентрация золота на глубине 300 метров и эталонные значения на этой же глубине.

В таблице 4.1 приведен фрагмент данных для нескольких случайно отобранных точек (x,y) . Второй столбец таблицы содержит значения концентрации золота, полученные в ходе полевых исследований, и используются в качестве исходных данных для проведения прогнозных расчетов. Следующие столбцы содержат данные, полученные в результате вычислительных экспериментов для глубин от 100 до 400 метров (z_c), и эталонные значения, полученные в результате полевых и лабораторных исследований (z_e).



**Рисунок 14 – Концентрация золота на глубине залегания 300 м
расчетные значения**



**Рисунок 15 – Концентрация золота на глубине залегания 300 м
эталонные значения**

Таблица 4.1 – Концентрация Au

(x, y)	h=0	h=100 m		h=200 m		h=300 m		h=400 m	
		z_C	z_E	z_C	z_E	z_C	z_E	z_C	z_E
1	0.0247	0.0314	0.0316	0.0392	0.0370	0.0396	0.0371	0.0309	0.0372
2	0.0221	0.0320	0.0319	0.0288	0.0312	0.0355	0.0323	0.0342	0.0297
3	0.0477	0.0711	0.0709	0.0694	0.0718	0.0668	0.0724	0.0532	0.0633
4	0.0192	0.0225	0.0240	0.0249	0.0267	0.0260	0.0273	0.0267	0.0268
5	0.0194	0.0255	0.0283	0.0288	0.0279	0.0299	0.0263	0.0302	0.0268
6	0.0220	0.0242	0.0267	0.0264	0.0292	0.0291	0.0349	0.0308	0.0316
7	0.0160	0.0199	0.0204	0.0215	0.0233	0.0228	0.0229	0.0242	0.0226
8	0.0228	0.0276	0.0295	0.0312	0.0330	0.0335	0.0324	0.0350	0.0319

4.3 Применение алгоритма для определения распределения аномалий лития на глубине

С помощью изложенного алгоритма были проведены расчеты практической задачи выявления аномалий при исследовании пространственного распределения химических элементов на месторождениях, которая описывается интегральным уравнением Фредгольма первого рода [1]. Использованы реальные данные конкретного месторождения полезных ископаемых. Сравнение результатов свидетельствуют об уверенном определении глубины залегания источников.

Была проведена обработка и анализ числовых данных вышеизложенными математическими методами и комплексом прикладных программ. Данные получены в инженерной лаборатории при проведении аналитических исследований ICP-MS спектроскопии, 777 отобранных проб на 70 химических элементах на обследованной территории площадью свыше 40 тысяч квадратных километров, которые получены в экспедиционных исследованиях по геохимии и минералогии рыхлых отложений месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы [56]. Цифровая поверхность, построенная графическим редактором Surfer, показывает характер распределения аномалий Li на дневной поверхности по данным, которые были собраны в ходе полевых и лабораторных исследований показана на рисунке 16. На рисунке 17 построена цифровая поверхность графическим редактором Surfer характера распределения аномалий Li на глубине по данным, которые были получены предложенными выше численными методами и комплексом прикладных программ.

Были использованы реальные данные бурения Калбы-Нарымской зоны [77] для сравнения результатов численных расчетов. В таблице 4.2 приведены результаты аномальных точек распределения Li на поверхности и на глубине 300 метров.

Результаты сравнений концентраций показали, расхождение рассчитанных данных с данными проб из скважин составило 2-4 %.

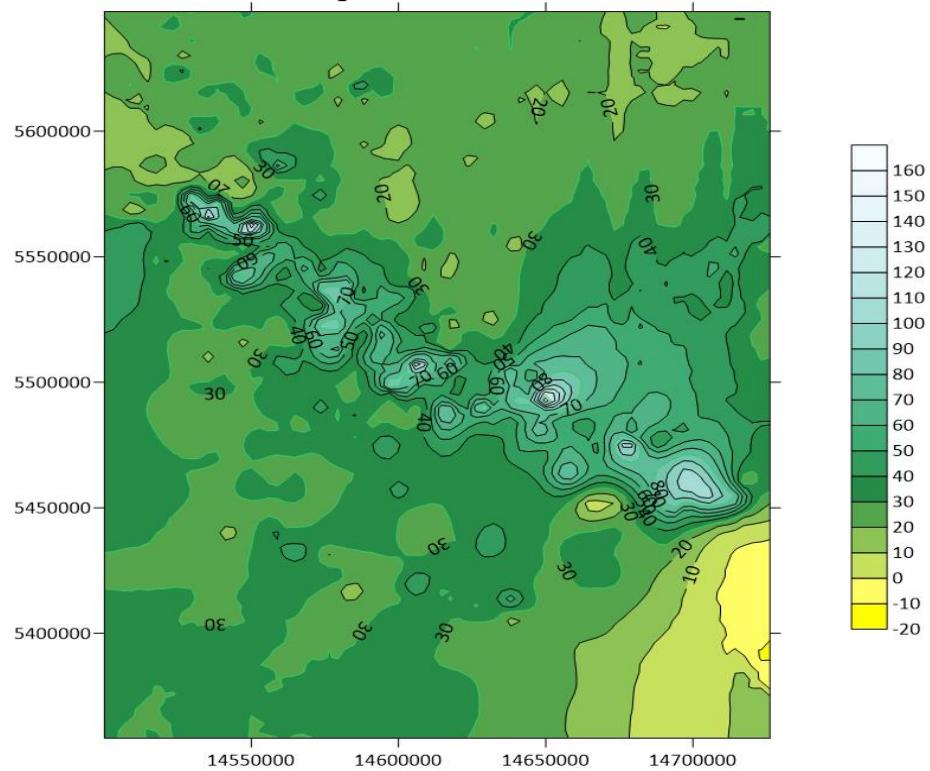


Рисунок 16 – Характер распределения аномалий Li на дневной поверхности,

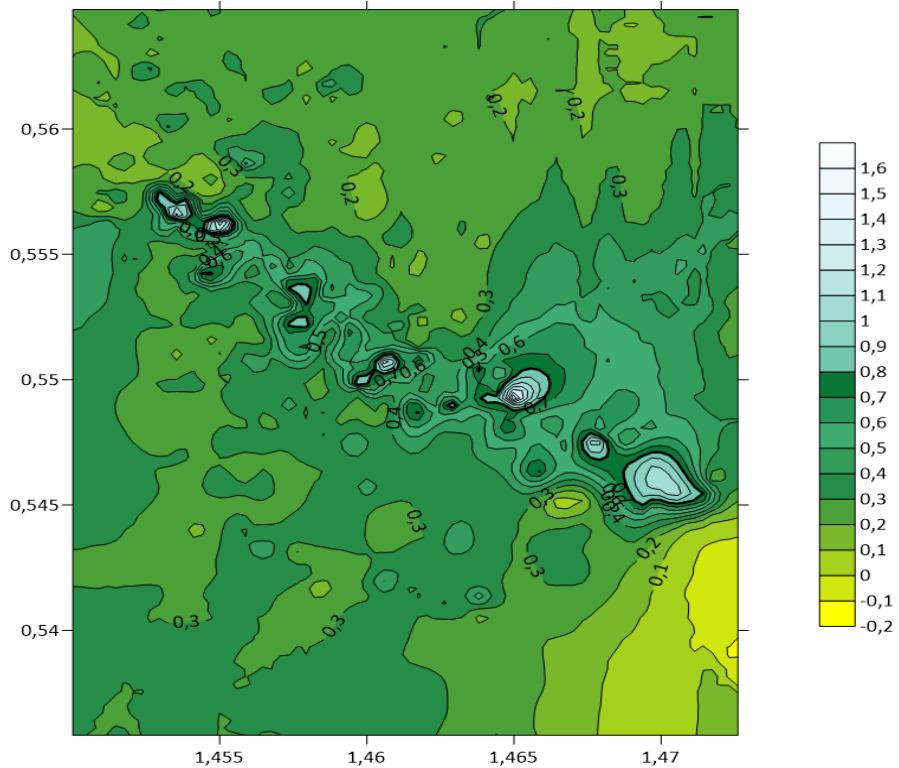


Рисунок 17– Характер распределения аномалий Li на глубине численно реализованный предложенными методами

Таблица 4.2 – Концентрация Li

№	Проба	Концентрация на поверхности	Концентрация на глубине 300 метров	Результат численных расчетов для глубинны 300 метров
1	G-71	105.8	107.7	110.2
2	G-115	132.7	128.4	130.3
3	G-169	126.6	127.8	130.4
4	G-181	133	131.5	130.8
5	G-185	141	142.3	140.7
6	G-498	104.1	107.6	110.3
7	G-498	156.975	158.5	160.1
8	G-173	122.2	119.3	120.4

Разработанные методы численной реализации обратных задач математической геофизики и геохимии показали удовлетворительную точность на тестовых примерах.

В работе [11] рассматривается дискретизированные интегральные уравнения Фредгольма первого рода и сходящиеся итерационные процессы. В принципе с их помощью можно найти решение интегрального уравнения с заменой интеграла квадратурной суммой со сколь угодно высокой точностью, выбирая достаточно малые шаги сетки. Но тогда увеличивается как размерность приближенной задачи, так и затраты на ее решение. Поэтому при численных расчетах используется повышение точности приближенных решений на последовательности сеток. Применение такого подхода позволяет использовать в расчетах только известные квадратурные и кубатурные формулы. Такой статистический анализ количества узлов сетки позволяет получить приближенное решение с требуемой точностью.

Разработанный модуль в виде комплекса прикладных программ был использован для цифрового моделирования конкретного месторождения для выявления скрытых рудных объектов [11, 12]. Все численные расчеты проводились на 2x – процессорном стоечном сервере 1U 2xS 8xDDR4 4x3.5/CPU 2xCLX 4214R/DDR4 2x16GB 2933MHZ/Net 2xSFP 10Gb, который удаленно обслуживается в data центре ТОО «Академсеть» г.Алматы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой PhD диссертации представлены результаты исследования численного решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, к котором приводиться обратная задача математической геофизики о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс.

Основные результаты, полученные в этой диссертации:

1. Разработан алгоритм метода сопряженных уравнений для численного решения задачи обработки большого количества данных;
2. Разработан проекционный метод Бубнова-Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра;
3. Получена априорная оценка невязки на полуинтервалах метода Бубнова – Галеркина с базисами в виде вейвлетов Лежандра;
4. Получена оценка погрешности решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода и результаты сформулированы в виде теоремы;
5. Получено численное решение двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода;
6. Проведен анализ полученных численных результатов и разработанные методы численной реализации решения обратных задач математической геофизики и геохимии показали удовлетворительную точность на тестовых примерах;
7. Разработан программный модуль геоинформационной системы, основанный на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений;
8. Разработанный модуль в виде комплекса прикладных программ был использован для цифрового моделирования конкретного месторождения для выявления скрытых рудных объектов.

Так же рассмотрены следующие приближенные методы численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода: метод регуляризации А.Н.Тихонова, метод Г.Н.Положего, конструктивный подход с «сопровождением».

Таким образом, поставленные в диссертационной работе задачи исследования полностью решены.

Результаты расчетов и сравнительный анализ использованных методов показывает, что проекционный метод Бубнова-Галеркина в базисами в виде вейвлетов Лежандра является наиболее оптимальным методом для поставленной задачи и так же эффективным в отношении точности и удобным в реализации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А.Н. Математическая геофизика. - М.: ОИФЗ РАН, 1999.- 476 с.
2. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений: Учебное пособие. - НГУ, 1981. - 75 с.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральное уравнение: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – К.: Науково Думка, 1986, - 537 с.
4. Положий Г.Н. Об одном методе решение интегральных уравнений// Известия АН СССР. Серия математика. –Изд. АН СССР, 1959, Т. 23, выпуск 2, С. 295 – 312.
5. Доценко С.И., Перчик Е.Л. Конструктивный подход к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода // ResearchGate. - 2015. - 16 p. DOI: 10.13140/RG.2.1.1645.5844.
6. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2000. - 335 с.
7. Temirbekov N., Temirbekova L. Using the conjugate equations method for solving inverse problems of mathematical geophysics and mathematical epidemiology // AIP Conference Proceedings. -2021.- 2325, 020023.
8. Maleknejad K., Sohrabi S. Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – Vol.186. -P. 836- 843.
9. Temirbekov N., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. Numerical solution of the first kind of Fredholm integral equations by projection methods with wavelets as the basis functions // TWMS J. Pure Appl. Math. – 2022. -Vol.13, №1. - P. 105-118.
10. Temirbekov N., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. On effective methods of regularization with discretization of integral equations//AIP Conference Proceedings. – 2023. – 2781, 020002.
11. Темирбеков Н.М., Лось В.Л., Имангалиев Е.И., Байгерев Д.Р., Темирбекова Л.Н., Нурмангалиева М.Б. Модуль геоинформационной системы на основе численного моделирования обратных задач геохимии регуляризирующими алгоритмами // Вестник КазНПУ им.Абая. Серия физ.-мат. науки.- Алматы, 2021.-№3(75).- С. 15-28.
12. Temirbekov N., Imangaliyev Y., Baigereyev D., Temirbekova L. Nurmangaliyeva M. Numerical simulation of inverse geochemistry problems by regularizing algorithms // Cogent Engineering. – 2022. -Vol.9, Iss.1. - P.1-21.
13. Шокин Ю. И., Потапов В. П. ГИС сегодня: состояние, перспективы, решения // Вычислительные технологии. - 2015. - Т. 20, №5. - С. 175-213.
14. Xufeng Shang, Danfu Han. Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using linear Legendre multi-wavelets // Applied Mathematics and Computation. - 2007. – Vol.191(2). - P.440-444.
15. Di Yuan, Xinming Zhang. An overview of numerical methods for the first kind Fredholm integral equation // SN Applied Sciences. – 2019. –Vol.1, №1178.
16. Krisch A. An Introduction to the Mathematical Theory of inverse problems. - 2nd edn. - New York: Springer – Verlag, 2013. – 400 p.

17. M. Didgar, A. Vahidi, J. Bazar. Application of Taylor Expansion for Fredholm integral equations of the first kind // Journal of Mathematics. – 2019. - Vol.51(5). - P. 1-14.
18. Dong Y, Chen L. Numerical research of Fredholm integral equations of the first kind based on Legendre wavelets// Math Pract Theory. – 2019. – Vol. 49(1). -P. 241-246.
19. Maleknejad K, Saeedipoor E. An efficient method based on hybrid functions for Fredholm integral equation of the first kind with convergence analysis // Applied Mathematics and computation. – 2017. – Vol. 304. -P. 93–102.
20. Maleknejad K, Lotfi T, Mahdiani K. Numerical solution of first kind Fredholm integral equations with wavelets-Galerkin method (WGM) and wavelets precondition//Applied Mathematics and computation. – 2007. –Vol.186. - P. 794–800.
21. Babolian E., Lotfi T., Paripour M. Wavelet moment method for solving Fredholm integral equations of the first kind // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – Vol. 186. -P.1467-1471.
22. Tahami M., Askari Hemmat A., Yousefi S.A. Numerical solution of two-dimensional first kind Fredholm integral equations by using linear Legandre wavelet // International Journal of wavelets, Multiresolution and Information Processing. – 2016. - Vol. 14, №1. – 20 p.
23. H.Hosseinzadeh, M.Dehghan, Z.Sedaghatjoo. The stability study of numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind with emphasis on its application in boundary elements method // Applied Numerical Mathematics. 1-2020. – Vol. 58. - P.134-151.
24. M.Bahmanpour, M.A.FariborziAraghi. A Method for solving Fredholm Integral Equations of the First Kind Based on Chebysev Wavelets // Analysis in Theory and Applications. -2013. - Vol.29, №.3. - P.197-207.
25. Hojatollah Adibi, Pouria Assari. Chebyshev Wavelet Method for Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind // Hindawi Publishing Corporation. Mathematical Problemd in Engineering. - 2010. – Vol. 2010, Article ID138408. - 17 p.
26. Yanying Ma, Jin Huang, and Hu Li. A novel numerical method of two-dimensional Fredholm integral equations of the second kind// Mathematical problems in engineering. – 2015. – Vol. 2015, ID 624013. - 9 p.
27. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. - 2019. - Vol. 27, № 3. - P. 453-456.
28. Тихонов Н.А., Самарский А.А.Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004.-800 с.
29. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала // Л.Н.Сретенский – М. :Гостехиздат, 1946.- 318 с.
30. Дмитриев В.И., Дмитриева И.В. Итерационный метод аналитического продолжения гравитационного поля // Прикладная математика и информатика.- 2010.-№36. - С. 67-73.

31. LawrenceC. Evans Partial Differential Equations. - American Mathematical Society, 2010. - 695 p.
32. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные решения обратных задач математической физики. - М: ЛКИ, 2009. - 480 с.
33. Кабанихин С.И., Исаков К.Т. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. – Алматы: Казахский нац. педагог. ун-т им. Абая, 2007. – 330 с.
34. Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. – Алматы; Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач» благотворительный фонд обратных задач естествознания, 2006.- 432 с.
35. P.N. Vabishchevich. Approximate solution of the Cauchy problem for a first-order integrodifferential equation with solution derivative memory // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2023. – Vol. 422, 114887. – P. 1–11.
36. Petr N. Vabishchevich. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels // Applied Numerical Mathematics. – 2022. – Vol. 174. – P. 177–190.
37. П.Н. Вабищевич. Об устойчивости приближенного решения задачи Коши для некоторых интегродифференциальных уравнений первого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2023. - 63:2. – С.328–335.
38. Атанбаев С.А. Об одном устойчивом методе обратной задачи теплопроводности // Вычислительная математика. – 2000. – Т.5, №3. -С.3-10.
39. Темирбулатов С.И. Обратные задачи для эллиптических уравнений. - Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1975.- 72 с.
40. Елубаев С. Об одной обратной для телеграфного уравнения// Докл. АН СССР.-1969.-Т.189, №3.-С.461-463.
41. Отебаев М.О., Рысбайулы Б. Приближенный метод решения нелинейных операторных уравнений. Итерационный процесс, оценка скорости сходимости // Доклады НАН РК. – 1999.- Т.5.-С.20-25.
42. Rysbailly B., Karashbayeva Zh. Methods of finding diffusion and thermal conductivity coefficients of heat and mass transfer // Вестник КазНПУ им.Абая. Серия физ.-мат. науки. -2022. - №2(78). -С. 67-75.
43. Романова В.Г. Бидайбеков Е.Ы. К теории обратных задач магнитотелургического зондирования // Докл. АН СССР.-1985.-Т.280, №4.- С.807-810.
44. Кальменов Т.Ш. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Материалы межд. конф. «Тихонов и современная математика» МГУ.-М., 2006.-Т.1.-С.42-55.
45. Баканов Г.Б. Достаточное условие существования решения дискретной многомерной обратной задачи // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. - 2007. - 3. - С.40-50.
46. Нурсеитов Д.Б., Бектемесов М.А. Оценка скорости сильной сходимости метода итераций Ландвебера для решения начально-краевой задачи для уравнения Лапласа // Межд. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск, 2007. -С.30-36.

47. Kanguzhin B.E. Restoration of tape matrices with the help of the spectral date// J.Inv.Ill-Posed Problems – 2010.-№18.- P.389-400.
48. B. Mukanova. Numerical reconstruction of unknown boundary data in the Cauchy problem for Laplace's equation. // Inverse Problems in Science and Engineering, 2012. – Vol.21, Iss.8, - P.1255-1267.
49. Mukanova B., Maussumbekova S., Kulbay M. Solving of the Regularized Inverse Problem for Elliptic Equations in Cylindrical Coordinates: Analytical Formulas // Mechanical and Electrical Technology VII, 2017. – Vol.799-800 - P.693-697.
50. Нурсеитова А.Т., Тюлебердинова Г.А. Сходимость метода итерации Ландвебера для решения задачи определения акустической жесткости// Вестник КазНПУ Серия «математика, механика, информатика». -2008.-Т.21, №1. -С. 215-217.
51. Temirbekova L.N. Processing of Big Data in the Detection of Geochemical Anomalies of Rare-Earth Metal Deposits // AIP Conference Proceedings 1997, 020072 (2018).
52. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. – 2-е изд., перераб. и доп. –СПб.: БХВ – Петербург, 2006. -288 с.
53. Килбас А.А. Интегральные уравнения: Курс лекций. - Мн.: БГУ, 2005. – 143 с.
54. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во Московского физ.-техн. ун.-та, 1994. – 527 с.
55. Переверзев С.В. Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений. – К.: Институт математики НАН Украины, 1996. – 252 с.
56. Дьячков Б.А., Гавриленко О.Д., Бубняк А.Н. Современное состояние и проблемы регионального геологического изучения территории Восточного Казахстана // Геология и охрана недр. – 2017. - №3(64). -С. 31- 37.
57. Гавриленко О.Д. Методология оценки перспективности геохимических аномалий // Вестник ВКГ-ТУ им. Д.Серикбаева и Вычислительные технологии, совместный выпуск. -Усть-Каменогорск,2013. - Ч. 3. -С. 79-85.
58. Karchevsky A.L. Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. – 2013. - Vol. 1, № 2. - P. 4-20.
59. Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // Applied Mathematical Modeling. – 2016. - Vol. 40, № 2. - P. 1029–1037.
60. Marchuk I., Karchevsky A., Surtaev A., Kabov O. Heat flux at the surface of metal foil heater under evaporating sessile droplets // International Journal of Aerospace Engineering. – 2015. -Vol. 2015, Article ID 391036, 5 p.
61. Cheverda V.V., Marchuk I.V., Karchevsky A.L., Orlik E.V., Kabov O.A. Experimental investigation of heat transfer in a rivulet on the inclined foil // Thermophysics and Aeromechanics. – 2016. - Vol. 23, № 3. -P. 415-420.
62. Cheverda V.V., Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Heat flux density in the region of droplet contact line on a horizontal surface of a thin heated foil // Thermophysics and Aeromechanics. – 2017. - Vol. 24, № 5. - P. 803–806.

- 63.Басараб М.А., Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Яковлев В.П. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона. - Москва: Радиотехника, 2004. - 74 с.
- 64.Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. - 1100 с.
- 65.MohammadM.
A numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind Based on Tight Framelets Generated by the Oblique Extension Principle// Journal Symmetry. – 2019. – 11(7), 854. - 15 p.
- 66.Mohammad M., Cattani C. A collocation method via the quasi-affine biorthogonal systems for solving weakly singular type of Volterra-Fredholm integral equations // Alexandria Engineering Journal. – 2020. – Vol. 59, Iss. 4 -P. 2181-2191.
- 67.Mohammad M., Trounev A. Fractional nonlinear Volterra-Fredholm integral equations involving Atangana-Baleanu fractional derivative: framelet applications. // Advances in Difference Equations. –2020. - 2020:618. – 6 p.
- 68.Shiri B., Perfilieva I., Aljiani Z. Classical approximation for fuzzy Fredholm integral equation// Fuzzy sets and systems. -2021. –Vol. 404. - P.159-177.
- 69.Shiri B., Guo-Cheng Wu, Baleanu D. Collocation methods for terminal value problems of tempered fractional differential equations. // Applied Numerical Mathematics. – 2020. – Vol.156. - P. 385-395.
- 70.Bahmanpour M., Kajani M.T., Maleki M. Solving Fredholm integral equations of the first kind using Muntz wavelets. // Applied Numerical Mathematics. -2019 . - Vol. 143. - P.159-171.
- 71.Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.: БИНОМ, 2008. – 636 с.
- 72.Pouria Assari, Mehdi Dehghan. The Numerical Solution of Nonlinear Weakly Singular Fredholm Integral Equations Based on the Dual-Chebyshev Wavelets. // Appl. Comput. Math. - 2020. – Vol. 19(1). - P.3-19.
- 73.Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. –М.: Наука. 1989. – 432 с.
- 74.Вабищевич П.Н. Численное моделирование. - М.: МГУ, 1993. - 152с.
- 75.Спичак В. В. Методология нейросетевой инверсии геофизических данных // Физика Земли. - 2005. - №3. - С. 71-85.
- 76.Кочнев А.П., Юреков Е.Г. Основы типизации прогнозно-поисковых моделей // Известия Сибирского отделения Секции наук о Земле РАН. -2014. - №1 (44). – С. 74-80.
- 77.Кузьмина О.Н., Дьячков Б.А., Владимиров А.Г., Кириллов М.В., Редин Ю.О. Геология и минералогия золотоносных периодов Восточного Казахстана // Геология и геофизика. – 2013. - Т.54, №12.- С. 1889-1904.

Приложение А

Программный код реализации метода Бубнова-Галеркина с базисом в виде
вейвлетов Лежандра

c Program Vievlet

```
parameter (k=2,m=2,nab=51,n=2,dn=4)
dimension psi(n,m,nab),p(dn,nab),tk(nab,nab),f(nab),alf(dn),
*alf0(dn),yt(nab),y(nab),a(dn,dn),b(dn),t(nab),s(nab),x(nab),
*q(nab,nab),dt(nab)
open(59,file='yt.dat')
open(60,file='y.dat')
tau=0.001
eps=0.0001
ai=0.
bi=1.
h=(bi-ai)/(nab-1)
nabp=nab/2
nab2=nab-1
print 40, nab,nabp
40 format('nab=',i2, 3x,'nabp=', i2)
do 1 i=1,nab
t(i)=(i-1)*h
s(i)=t(i)
1 x(i)=t(i)
do 2 l=1,nabp
psi(1,1,l)=sqrt(2.)
psi(1,2,l)=sqrt(6.)*(4.*t(l)-1.)
2 continue
do 3 l=nabp+1,nab
psi(2,1,l)=sqrt(2.)
psi(2,2,l)=sqrt(6.)*(4.*t(l)-3.)
3 continue
do 4 i=1,n
do 4 j=1,m
io=(i-1)*m+j
do 5 l=1,nab
5 p(io,l)=psi(i,j,l)
c 5 print 41,io,l,p(io,l)
4 continue
41 format('io=',i2,3x,'l=',i2,3x,'p(io,l)=', f8.4)
do 6 i=1,nab
do 6 j=1,nab
6 tk(i,j)=x(i)*s(j)+(x(i)+s(j))/3.+1./5.
do 7 i=1,nab
7 f(i)=3*x(i)+19./15.
```

```

c      q(1,1)=0.25
c      q(1,nab)=0.25
c      q(nab,1)=0.25
c      q(nab,nab)=0.25
c      do 50 j=2,nab-1
c      q(1,j)=0.5
c 50 q(nab,j)=0.5
c      do 51 i=2,nab-1
c      q(i,1)=0.5
c 51 q(i,nab)=0.5
c      do 52 i=2,nab-1
c      do 52 j=2,nab-1
c 52 q(i,j)=1.
      do 53 i=1,nab
      do 53 j=1,nab
53 q(i,j)=1.
      do 8 i=1,dn
      do 8 j=1,dn
a(i,j)=0.
      do 9 lx=1,nab-1
      do 9 lt=1,nab-1
      a(i,j)=a(i,j)+q(lx,lt)*tk(lx,lt)*p(i,lx)*p(j,lt)*h**2
9 continue
8 continue
c      a(1,1)=0.21458
c      a(1,2)=0.04209845712841
c      a(1,3)=0.360416666
c      a(1,4)=0.04209845712841
c      a(2,1)=0.04209845712841
c      a(2,2)=0.01041667
c      a(2,3)=0.07818285
c      a(2,4)=0.01041667
c      a(3,1)=0.360416666
c      a(3,2)=0.07818285
c      a(3,3)=0.63125
c      a(3,4)=0.07818285
c      a(4,1)=0.04209845712841
c      a(4,2)=0.01041667
c      a(4,3)=0.07818285
c      a(4,4)=0.01041667

print 42
42 format('Matrisa A')
      print 45, ((a(i,j),j=1,dn),i=1,dn)
      do 10 i=1,dn

```

```

        b(i)=(f(1)*p(i,1)+f(nab)*p(i,nab))*h/2.
c      b(i)=0.
          do 11 j=2,nab-1
11   b(i)=b(i)+f(j)*p(i,j)*h
10   continue
c      b(1)=1.4259971
c      b(2)=0.30618621785
c      b(3)=2.48665884717
c      b(4)=0.3061862278
      print 43
43   format('Vektor b')
      print 45, (b(i),i=1,dn)
c Reshenie SLAU A*alpha=b
      do 12 j=1,dn
12   alf(j)=b(j)
      nn=0.
      nt=5000
14   nn=nn+1
      if(nn.gt.nt) go to 77
          do 15 j=1,dn
15   alf0(j)=alf(j)
      do 16 i=1,dn
          sum=0.
          do 17 j=1,dn
17   sum=sum+a(i,j)*alf0(j)
          alf(i)=alf0(i)-tau*(sum-b(i))
16   continue
          tnor=0.
          do 18 i=1,dn
              tvs=abs(alf(i)-alf0(i))
              if(tvs.gt.tnor) tnor=tvs
18   continue
c      print 44,nn,tnor

          if(tnor.gt.eps) go to 14
77   print 44,nn,tnor
          print 46
          print 45, (alf(i),i=1,dn)
          do 19 i=1,nab
          sum=0.
          do 20 j=1,dn
20   sum=sum+alf(j)*p(j,i)
          y(i)=sum
19   continue
          do 21 i=1,nab

```

```

yt(i)=1.+6.*x(i)**2.
21 dt(i)=abs(y(i)-yt(i))
do 22 i=1,nab
    print 101, i,x(i),y(i),yt(i),dt(i)
22 continue
    write (60,100)(x(i),y(i),i=1,nab)
    write (59,100)(x(i),yt(i),i=1,nab)
100 format(2f10.5)
101 format('x(',i2,')=',f10.5,2x,'y(i)=',f10.5,2x,'yt(i)=',f10.5,
*2x,'dt=',f8.6)
44 format('N iter=',i5, 3x, 'NORMA=', f8.4)
45 format(4f15.4)
46 format('Vektor alfa')
    stop
end

```